目　录

第一篇 随机分析基础

本篇由四章组成. 第一章介绍经典鞅论的主要结果, 即鞅的基本不等式, 收敛定理和 Doob 停止定理; 第二章介绍随机过程的一般理论. 内容有: 停时, 可选及可料 σ- 域, 截口定理, 过程的投影及有限变差过程的对偶投影; 第三章介绍现代鞅论基础: 上鞅的 Doob–Meyer 分解, 可积变差鞅与平方可积鞅, 局部鞅与半鞅; 第四章介绍随机积分的一般理论. 内容有: 可料过程对局部鞅及半鞅的随机积分, Itô 公式, 半鞅的局部时, Girsanov 定理, Brown 局部鞅的随机积分表示. 受篇幅所限, 对某些因需要预备知识较多或证明较长的结果略去了证明, 而对大多数结果, 都给出了自封的和完整的证明. 因此, 本篇可以作为概率论专业的研究生学习随机分析基础知识的入门读物.

本篇内容主要取材于何声武、汪嘉冈和作者合著的 [HWY], 第四章的 §5 和 §6 参考了作者的 [Y1] 以及 Revuz-Yor 的 [RY].

第一章 经典鞅论

鞅 (martingale) 这一概念是 J. Ville 于 1939 年首先引进概率论的，他借用了法文 martingale 有 "倍赌策略"(即赌输后加倍赔注) 这一含义. 中译名 "鞅"(马颔缰) 则是该法文词的另一含义. Lévy 最早研究了鞅序列. 1953 年 Doob 在他的 ≪Stochastic Processes≫ 这部历史性专著中首次系统总结了 Lévy 和他自己有关鞅的理论及应用成果，使鞅论成了随机过程理论的一个独立分支.

本章介绍经典鞅论的主要结果 (如 Doob 不等式、上穿不等式、收敛定理和 Doob 停止定理等). 前三节和第四节分别讨论离散和连续时间情形.

§ 1. 基本不等式

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为一概率空间，$(\mathcal{F}_n,n\geq 0)$ 为一单调递增的 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 域序列. 令 $\mathcal{F}_\infty \hat{=} \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$. 随机变量序列 $(X_n,n\geq 0)$ 称为关于 $(\mathcal{F}_n)$ 适应的，如果每个 X_n 为 $\mathcal{F}_n$- 可测的.

定义 1.1 $(\mathcal{F}_n)$ 适应的随机变量序列 $(X_n,n\geq 0)$ 称为鞅 (上鞅，下鞅)，如果每个 X_n 为可积的，且

$$\mathbb{E}[X_{n+1}\mid \mathcal{F}_n]=X_n(\leq X_n,\ \geq X_n)\ \text{a.s.}\,.$$

定理 1.2 1) 设 (X_n),(Y_n) 为鞅 (上鞅)，则 (X_n+Y_n) 为鞅 (上鞅)，$(X_n\wedge Y_n)$ 为上鞅.

2) 设 (X_n) 为鞅 (下鞅). f 为 $\mathbb{R}$ 上一连续 (连续非降) 凸函数. 如果每个 $f(X_n)$ 可积，则 $(f(X_n))$ 为下鞅.

证明 1) 显然. 2) 由 Jensen 不等式推得. ∎

定义 1.3 令 $\overline{\mathbb{N}}_0=\{0,1,2,\cdots,\infty\}$. 设 T 为 $\overline{\mathbb{N}}_0$- 值随机变量. 如果对每个 $n\in\mathbb{N}_0,[T=n]\in\mathcal{F}_n$，则称 T 为关于 $(\mathcal{F}_n)$ 的停

时. 对停时 T, 令

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty \ : \ A \cap [T = n] \in \mathcal{F}_n \, , \forall n \geq 0\} \, ,$$

称 $\mathcal{F}_T$ 为 T 前事件 σ- 域.

下一定理列出了有关停时的一些基本结果, 其证明都是不足道的, 故从略.

定理 1.4 设 S,T 为停时, (S_n) 为停时列.

1) $\wedge_n S_n, \vee_n S_n$ 为停时;

2) $A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A \cap [S \leq T] \in \mathcal{F}_T$, $A \cap [S = T] \in \mathcal{F}_T$;

3) $S \leq T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$;

4) 设 $A \in \mathcal{F}_S$, 令 $S_A = SI_A + \infty I_{A^c}$, 则 S_A 为停时, 且 $\mathcal{F}_{S_A} \cap A = \mathcal{F}_S \cap A$. 我们称 S_A 为 S 到 A 上的局限.

定理 1.5 设 (X_n) 为一适应随机序列, T 为停时, 则 $X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathcal{F}_T$- 可测.

证明 设 B 为一 Borel 集, $n \geq 0$, 则

$$[X_T I_{[T<\infty]} \in B] \cap [T = \infty] = \emptyset \, ,$$

$$[X_T I_{[T<\infty]} \in B] \cap [T = n] = [X_n \in B] \cap [T = n] \in \mathcal{F}_n \, ,$$

这表明 $[X_T I_{[T<\infty]}] \in \mathcal{F}_T$, 即 $X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathcal{F}_T$ 可测. ∎

下一定理是有界停时的 Doob 停止定理. 它是证明下面的鞅不等式的基础.

定理 1.6 设 (X_n) 为鞅 (上鞅), S,T 为有界停时, 且 $S \leq T$, 则有

$$\mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] = X_S (\leq X_S) \ \text{ a.s. } . \tag{1.1}$$

证明 只需证上鞅情形. 设 $T \leq n$, 由于 $|X_T| \leq \sum_{j=1}^n |X_j|$, $|X_S| \leq \sum_{j=1}^n |X_j|$, 故 X_S, X_T 可积. 令 $A \in \mathcal{F}_S, j \geq 0$, 则

$$A_j \doteq A \cap [S = j] \cap [T > j] \in \mathcal{F}_j \ .$$

首先假定 $T - S \leq 1$. 这时由上鞅性质

$$\int_A (X_S - X_T) d\mathbb{P} = \sum_{j=0}^n \int_{A_j} (X_j - X_{j+1}) d\mathbb{P} \geq 0 \ .$$

对一般情形，令 $R_j = T \wedge (S+j), 1 \leq j \leq n$. 则每个 R_j 为停时，且 $S \leq R_1 \leq \cdots \leq R_n$, $R_1 - S \leq 1$, $R_{j+1} - R_j \leq 1 (1 \leq j \leq n-1)$. 令 $A \in \mathcal{F}_S$ 由定理 1.4.3) 知 $A \in \mathcal{F}_{R_j}, 1 \leq j \leq n$. 故由前面已证结果得

$$\int_A X_S d\mathbb{P} \geq \int_A X_{R_1} d\mathbb{P} \geq \cdots \geq \int_A X_T d\mathbb{P} . \tag{1.2}$$

由于 X_S 为 $\mathcal{F}_S$- 可测 (定理 1.5), 故由 (1.2) 推得 (1.1). ∎

定理 1.7 设 $k \geq 1, (X_n)_{n \leq k}$ 为一上鞅. 则对 $\lambda > 0$ 有

$$\lambda \mathbb{P}(\sup_{n \leq k} X_n \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[X_0] - \int_{[\sup_{n \leq k} X_n < \lambda]} X_k d\mathbb{P} , \tag{1.3}$$

$$\lambda \mathbb{P}(\inf_{n \leq k} X_n \leq -\lambda) \leq \int_{[\inf_{n \leq k} X_n \leq -\lambda]} (-X_k) d\mathbb{P} , \tag{1.4}$$

$$\lambda \mathbb{P}(\sup_{n \leq k} | X_n | \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[X_0] + 2\mathbb{E}[X_k^-] . \tag{1.5}$$

证明 令 $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \geq \lambda\} \wedge k$, 则 T 为有界停时，且在 $[\sup_{n \geq k} X_n \geq \lambda]$ 上有 $X_T \geq \lambda$, 在 $[\sup_{n \leq k} X_n < \lambda]$ 上有 $T = k$. 于是由定理 1.6 得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_0] \geq \mathbb{E}[X_T] &= \int_{[\sup_{n \leq k} X_k \geq \lambda]} X_T d\mathbb{P} + \int_{[\sup_{n \leq k} X_k < \lambda]} X_T d\mathbb{P} \\ &\geq \lambda \mathbb{P}(\sup_{n \leq k} X_n \geq \lambda) + \int_{[\sup_{n \leq k} X_n < \lambda]} X_k d\mathbb{P}, \end{aligned}$$

此即 (1.3). 同理可证 (1.4). 由 (1.3) 及 (1.4) 立得 (1.5). ∎

定理 1.8 设 $k \geq 1, (X_n)_{n \leq k}$ 为一鞅或非负下鞅，令 $X_k^* = \sup_{n \leq k} |X_n|$.

1) 对任何 $\lambda > 0$ 及 $p \geq 1$ 有

$$\mathbb{P}(X_k^* \geq \lambda) \leq \lambda^{-p} \mathbb{E}[| X_k |^p] . \tag{1.6}$$

2) 对任何 $p > 1$ 有

$$\|X_k^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|X_k\|_p . \tag{1.7}$$

其中 $\|\cdot\|_p$ 为 L^p- 范数.

不等式 (1.6) 及 (1.7) 分别称为 极大值不等式 及 Doob 不等式.

证明 不妨设 $\mathbb{E}[|X_k|^p]<\infty$. 由 Jensen 不等式易知 $\mathbb{E}[|X_n|^p]<\infty, 0\le n\le k-1$. 故由定理 1.2.2), $(|X_n|^p, n\le k)$ 为下鞅. 对上鞅 $(-|X_n|^p, 0\le n\le k)$ 及 λ^p 应用不等式 (1.4) 即得 (1.6).

往证 (1.7). 设 Φ 为 $\mathbb{R}_+$ 上一右连续增函数且 $\Phi(0)=0$. 由 Fubini 定理及 (1.4) 得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Phi(X_k^*)] &= \int_\Omega \int_{[0,X_k^*]} d\Phi(\lambda)d\mathbb{P} \\
&= \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(X_k^*\ge\lambda)d\Phi(\lambda) \\
&\le \int_0^\infty (\lambda^{-1}\int_{[X_k^*\ge\lambda]} |X_k|d\mathbb{P})d\Phi(\lambda) \\
&= \mathbb{E}\Big[|X_k|(\int_0^{X_k^*}\lambda^{-1}d\Phi(\lambda))\Big]\,, \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

在 (1.8) 中令 $\Phi(\lambda)=\lambda^p$, $p>1$, 则由 (1.8) 及 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_k^*)^p] &\le \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|X_k|(X_k^*)^{p-1}] \\
&\le \frac{p}{p-1}\big(\mathbb{E}[|X_k|^p]\big)^{\frac{1}{p}}\big(\mathbb{E}[(X_k^*)^p]\big)^{\frac{p-1}{p}}\,. \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

由于 $(|X_n|^p, n\le k)$ 为一下鞅,

$$
\|X_k^*\|_p \le \|\sum_{n=0}^k |X_n|\|_p \le (k+1)\|X_k\|_p < \infty\,.
$$

在 (1.9) 两边同乘 $\big(\mathbb{E}[(X_k^*)^p]\big)^{\frac{1-p}{p}}$ 即得 (1.7). ∎

下面我们将证明上鞅的上穿不等式. 为此, 先交代一些记号.

设 (X_n) 为一 $(\mathcal{F}_n)$ 适应随机序列, $[a,b]$ 为一闭区间. 令

$$T_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n \leq a\}, \qquad T_1 = \inf\{n > T_0 : X_n \geq b\},$$
$$T_{2j} = \inf\{n > T_{2j-1} : X_n \leq a\}, \quad T_{2j+1} = \inf\{n > T_{2j} : X_n \geq b\},$$

则 (T_k) 为一停时上升列. 我们用 $U_a^b[X,k]$ 表示序列 $(X_0,\cdots,X_k)$ 上穿 $[a,b]$ 的次数, 则显然有

$$\left[U_a^b[X,k]=j\right] = [T_{2j-1} \leq k < T_{2j+1}] \in \mathcal{F}_k,$$

从而 $U_a^b[X,k]$ 为 $\mathcal{F}_k$ 可测随机变量.

定理 1.9 设 $N \geq 1, (X_n)_{n\leq N}$ 为一上鞅, 则

$$\mathbb{E}U_a^b[X,N] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_N-a)^-]. \tag{1.10}$$

证明 由定理 1.6, 对 $k \geq 0$ 有

$$\begin{aligned}0 &\geq \mathbb{E}[X_{T_{2k+1}\wedge N} - X_{T_{2k}\wedge N}]\\ &= \mathbb{E}[(X_{T_{2k+1}\wedge N} - X_{T_{2k}\wedge N})(I_{[T_{2k}\leq N<T_{2k+1}]} + I_{[N\geq T_{2k+1}]})],\\ &\geq \mathbb{E}[(X_n-a)I_{[T_{2k}\leq N<T_{2k+1}]} + (b-a)I_{[N\geq T_{2k+1}]}].\end{aligned} \tag{1.11}$$

由于 $\left[U_a^b[X,N] \geq k+1\right] \subset [N \geq T_{2k+1}]$ 及 $[T_{2k} \leq N < T_{2k+1}] \subset \left[U_a^b[X,N]=k\right]$, 故由 (1.11) 得

$$\mathbb{P}(U_a^b[X,N] \geq k+1) \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_n-a)^- I_{[U_a^b[X,N]=k]}]. \tag{1.12}$$

在 (1.12) 两边对 k 求和得 (1.10). ∎

§2. 收敛定理

定理 2.1 设 (X_n) 为一上鞅. 如果 $\sup_n E[X_n^-] < \infty$(或者等价地, $\sup_n E[|X_n|] < \infty$, 因为 $E[|X_n|] = E[X_n] + 2E[X_n^-]$), 则当

$n \to \infty$ 时， X_n a.s. 收敛于一可积随机变量 X_∞. 若 (X_n) 为非负上鞅，则对一切 $n \geq 0$ 有

$$E[X_\infty \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n \quad \text{a.s.}. \tag{2.1}$$

证明 令 Q 表示有理数全体. 设 $a, b \in Q, a < b$. 令 $U_a^b(X)$ 为序列 $(X_n)_{n \geq 0}$ 上穿区间 $[a, b]$ 的次数, 即 $U_a^b(X) = \lim_{N\to\infty} U_a^b(X, N)$, 由 (1,7) 我们有

$$\mathbb{E}[U_a^b(X)] \leq \frac{1}{b-a} \sup_N \mathbb{E}[(X_N - a)^-] \leq \frac{1}{b-a}(a^+ \sup_N \mathbb{E}[X_N^-]) < \infty.$$

于是 $U_a^b(X) < \infty$ a.s.. 令

$$W_{a,b} = [\liminf_{n\to\infty} X_n < a \ , \ \limsup_{n\to\infty} X_n > b],$$
$$W = \bigcup_{a,b\in Q, a<b} W_{a,b} \ .$$

由于 $W_{a,b} \subset [U_a^b(X) = +\infty]$, 故 $P(W_{a,b}) = 0$, 从而 $P(W) = 0$. 若 $\omega \notin W$, 则 $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ 存在, 记为 $X_\infty(\omega)$; 若 $\omega \in W$, 令 $X_\infty(\omega) = 0$. 于是 $X_n \longrightarrow X_\infty$ a.s., 且由 Fatou 引理,

$$\mathbb{E}[|X_\infty|] \leq \sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty \ .$$

另一结论由条件期望的 Fatou 引理推得. ∎

系 2.2 设 (X_n) 为一鞅 (上鞅). 如果 (X_n) 一致可积, 则 X_n a.s. 且 L^1 收敛于 X_∞. 此外, $\forall n \geq 0$

$$\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_n] = X_n (\leq X_n) \quad \text{a.s.}. \tag{2.2}$$

系 2.3 设 ξ 为一可积随机变量, 令 $\xi_n = \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_n]$, $\eta = \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_\infty]$, 则 ξ_n a.s. 且 L^1 收敛于 η.

现在我们研究以 $-\mathbb{N}_0 = \{\cdots, -2, -1, 0\}$ 为参数集的上鞅收敛性.

设 $((\mathcal{F}_n))_{n\in -\mathbb{N}_0}$ 为一列 $\mathcal{F}$ 的子 $\sigma-$ 域，对一切 $n\in -\mathbb{N}_0$, $\mathcal{F}_{n-1}\subset \mathcal{F}_n$, 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbb{N}_0}$ 适应的随机序列 $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}_0}$ 称为鞅(上鞅)，如果对每个 $n\in -\mathbb{N}_0$, X_n 可积，且有

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} (\leq X_{n-1}) \text{ a.s.} .$$

定理 2.4 设 $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}_0}$ 为一上鞅，则极限 $\lim_{n\longrightarrow -\infty} X_n$ a.s. 存在. 如果 $\lim_{n\to -\infty} \mathbb{E}[X_n] < +\infty$, 则 (X_n) 一致可积，X_n a.s. 且 L^1 收敛于 $X_{-\infty}$.

证明 我们用 $U_a^b[X,-N]$ 表示序列 $(X_{-N}, X_{-N+1},\cdots,X_0)$ 上穿区间 $[a,b]$ 的次数，则由 (1.7) 得

$$\mathbb{E}U_a^b[X,-N] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_0-a)^-] .$$

令 $U_a^b(X) = \lim_{N\to +\infty} U_a^b[X,-N]$, 我们有

$$\mathbb{E}U_a^b(X) \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_0-a)^-] < +\infty .$$

由于 $U_a^b(X)$ 为序列 $(-X_0,-X_{-1},-X_{-2},\cdots)$ 上穿 $[-b,-a]$ 的次数，故由定理 2.1 的证明知 $X_n \to X_{-\infty}$ a.s.(但不必有 $|X|_{-\infty}<\infty$ a.s.).

当 $n\to -\infty$ 时， $\mathbb{E}[X_n]\uparrow A > -\infty$. 假定 $A<+\infty$. 往证 $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}_0}$ 一致可积. 由于 $(\mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_n])_{n\in -\mathbb{N}_0}$ 一致可积，只需证 $(X_n - \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_n])$ 一致可积. 于是，不妨假定 (X_n) 为非负上鞅. 给定 $\epsilon>0$, 取自然数 k 足够大，使得 $A-\mathbb{E}[X_{-k}]<\frac{\epsilon}{2}$. 对 $c>0$ 及 $n<-k$, 由上鞅性，我们有

$$\begin{aligned}\int_{[X_n>c]} X_n d\mathbb{P} &= \mathbb{E}[X_n] - \int_{[X_n\leq c]} X_n d\mathbb{P}\\ &\leq \mathbb{E}[X_n] - \int_{[X_n\leq c]} X_{-k} d\mathbb{P}\\ &= \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X_{-k}] + \int_{[X_n>c]} X_{-k} d\mathbb{P} .\end{aligned}$$

由于 $A \geq \mathbb{E}[X_n] \geq \mathbb{E}[X_{-k}]$, 故对 $n < -k$, $\mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X_{-k}] < \frac{\epsilon}{2}$. 另一方面，由于 $\mathbb{P}(X_n > c) \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[X_n] \leq \frac{A}{c}$. 故当 c 足够大时，对一切 $n \in -\mathbb{N}_0$ 有

$$\int_{[X_n > c]} X_{-k} d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{2}$$

及

$$\int_{[X_j > c]} X_j d\mathbb{P} < \epsilon, \ j = 0, -1, \cdots, -k.$$

于是当 c 足够大时，有

$$\sup_n \int_{[X_n > c]} X_n dP < \epsilon ,$$

这表明 (X_n) 一致可积. 既然 $X_n \to X_{-\infty}$ a.s., 故 (X_n) L^1 收敛于 $X_{-\infty}$. ∎

系 2.5 设 ξ 为一可积随机变量, $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 为一列单调下降的 $\mathcal{F}$ 的子 $\sigma-$ 域. 令 $\xi_n = \mathbb{E}[\xi | \mathcal{G}_n]$, 则

$$\xi_n \longrightarrow \mathbb{E}[\xi \mid \bigcap_n \mathcal{G}_n].$$

证明 对一切 $n \in -\mathbb{N}_0$, 令 $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_{-n}$, $\eta_n = \xi_{-n}$, 则 $(\eta_n)_{n \in -\mathbb{N}_0}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)$ 为一致可积鞅. 故由定理 2.4 推得结论. ∎

§ 3. Doob 停止定理

在 §1 中，为了证明鞅不等式，我们证明了有界停时情形的 Doob 停止定理 (定理 1.6). 本节将把这一结果推广到一般停时情形，但要求鞅 (或上鞅) 是 右闭的.

定义 3.1 一鞅 (上鞅)$(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ 称为 可右闭的, 如果存在一可积随机变量 $X_\infty \in \mathcal{F}_\infty$, 使得对一切 $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_n] = X_n (\leq X_n)$ a.s.. 这时 $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0)$ 称为 右闭鞅 (上鞅), X_∞ 称为

$(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ 的 右闭元. 下一定理是右闭鞅及右闭上鞅的 Doob 停止定理.

定理 3.2 设 $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0)$ 为一鞅 (上鞅). S,T 为两个停时, 且 $S \leq T$. 则 X_S, X_T 可积, 并且有

$$\mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] = X_S (\leq X_S) \quad \text{a.s.} . \tag{3.1}$$

证明 设 $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0)$ 为鞅. 令 $S_n = SI_{[S \leq n]} + (+\infty)I_{[S>n]}$, 由于集合 $\{0, 1, \cdots, n, +\infty\}$ 与集合 $\{0, 1, \cdots, n, n+1\}$ 保序同构, 故由定理 1.6,

$$X_{S_n} = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_{S_n}] \quad \text{a.s.} .$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_S] = X_S \quad \text{a.s.} .$$

特别, 这表明 X_S 可积, 对停时 T 也有同样等式, 故有

$$\mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_T] \mid \mathcal{F}_S] = X_S \quad \text{a.s.} .$$

现在设 $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0))$ 为上鞅, 令 $Y_n = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_n]$, $Z_n = X_n - Y_n$, $Y_\infty = X_\infty$ 及 $Z_\infty = 0$, 则 $(Z_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0)$ 为非负上鞅, 由于 $E[Z_{S_n}] \leq E[Z_0]$(定理 1.3), 故由 Fatou 引理, Z_S 可积, 从而 $X_S = Y_S + Z_S$ 可积, 令 $T_n = TI_{[T \leq n]} + (+\infty)I_{[T>n]}$, 则由定理 1.6

$$Z_{S_n} \geq \mathbb{E}[Z_{T_n} \mid \mathcal{F}_{S_n}] \quad \text{a.s.} . \tag{3.2}$$

由于 $Z_{T_n} \uparrow Z_T$, 在 (3.2) 中令 $n \to \infty$ 得

$$Z_S \geq \mathbb{E}[Z_T \mid \mathcal{F}_S] \quad \text{a.s.} .$$

但由已证结果, $Y_S = \mathbb{E}[Y_T | \mathcal{F}_S]$ a.s., 所以

$$X_S \geq \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] \quad \text{a.s.} . \qquad \blacksquare$$

下一定理是定理 3.2 的加强形式.

定理 3.3 设 $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0)$ 为一鞅 (上鞅), S,T 为两个停时, 则

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_S] = X_{T \wedge S} (\leq X_{T \wedge S}) \quad \text{a.s.} . \tag{3.3}$$

证明 由定理 1.4 的 2), $X_T I_{[T\leq S]} \in \mathcal{F}_T$, 从而由 (3.1) 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] &= \mathbb{E}[X_T I_{[T\leq S]} + X_{S\vee T} I_{[T>S]} \mid \mathcal{F}_S] \\ &= X_T I_{[T\leq S]} + X_S I_{[T>S]} \\ &= X_{T\wedge S} \qquad \text{a.s.}\end{aligned}$$

((X_n) 为上鞅时，第二个等号改为不等号 $\leq$). ▮

系 3.4 设 ξ 为一可积随机变量， S, T 为两个有穷停时，则

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_S] \mid \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_{S\wedge T}] \quad \text{a.s.}.$$

§ 4. 连续时间情形

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间， $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 为一单调非降的 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 域流. 令 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_t \mathcal{F}_t)$. 如果对一切 $t \geq 0$, 有 $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$, 称 $\mathbb{F}$右连续.

参数集为 $\mathbb{R}_+$ 的一族实值随机变量 $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ 称为一个随机过程(或简称过程), 它也简记为 X 或 (X_t). 对每个 $\omega \in \Omega$, $X_.(\omega)$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的一个函数, 称为 X 的一条轨道(或路径, 或样本函数). 如果 X 的全部轨道是连续的 (右连续的、左连续的), 则称 X 为连续 (右连续、左连续) 过程, 如果 X 的全部轨道右连续且左极限存在有穷，则称 X 为右连左极过程. 今后，对一右连左极过程 X, 我们用 $X_- = (X_{t-})$ 表示它的左极限过程，并约定 $X_{0-} = X_0$, 此外令 $\Delta X = X - X_-$, 称 ΔX 为 X 的跳过程.

过程 X 称为 $\mathbb{F}$-适应的, 如果对每个 $t \geq 0$, X_t 为 $\mathcal{F}_t$- 可测. 一个 $\mathbb{F}$- 适应过程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 叫做 $\mathbb{F}$-鞅 ($\mathbb{F}$-上鞅 ,$\mathbb{F}$-下鞅), 如果每个 X_t 可积，且对一切 $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_t] = X_s (\leq X_s, \geq X_s) \quad \text{a.s.}.$$

在本节我们将把离散时间鞅 (上鞅) 的主要结果推广到连续时间鞅 (上鞅) 情形.

设 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 为一适应过程, E 为 $\mathbb{R}_+$ 的一有限子集. 令 $E=\{t_1,\cdots,t_n\}$, $t_1<t_2<\cdots<t_n$, 记 $U_a^b[X,E]$ 为 $\{X_{t_1},\cdots,X_{t_n}\}$ 上穿 $[a,b]$ 的次数. 对 $\mathbb{R}_+$ 的任一子集 D 定义

$$U_a^b[X,D]=\sup\{U_a^b[X,E]: E\text{为}D\text{的有限子集}\}.$$

定理 4.1 设 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 为一上鞅, D 为 $\mathbb{R}_+$ 的一可数稠子集, 则对任何 $r<s\,(r,s\in\mathbb{R}_+)$, $a<b(a,b\in\mathbb{R})$ 及 $\lambda>0$, 我们有

$$\lambda\mathbb{P}(\sup_{t\in D\cap[r,s]}|X_t|\geq\lambda)\leq\mathbb{E}[X_r]+2\mathbb{E}[X_s^-]\,,\tag{4.1}$$

$$\mathbb{E}U_a^b[X,D\cap[r,s]]\leq\frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_s-a)^-]\,.\tag{4.2}$$

证明 直接由 (1.5) 及 (1.10) 推得. ∎

定理 4.2 设 (X_t) 为一上鞅, D 为 $\mathbb{R}_+$ 的一可数稠子集, 则对几乎所有 $\omega,\forall t\geq 0(t>0)$, $\lim_{s\in D,s\downarrow\downarrow t}X_s(\omega)$ $(\lim_{s\in D,s\uparrow\uparrow t}X_s(\omega))$ 存在且有穷. 若 (X_t) 的几乎所有轨道右连续, 则对几乎所有 ω 及一切 $t>0$, $X_{t-}(\omega)=\lim_{s\in\mathbb{R}_+,s\uparrow\uparrow t}X_t(\omega)$ 存在且有穷.

证明 设 $t\in\mathbb{R}_+$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, 令

$$H_{t,a,b}=\{\omega:\sup_{s\in D\cap[0,t]}|X_s(\omega)|=\infty\text{或}U_a^b[X(\omega),D\cap[0,t]]=\infty\}\,,$$

则 $H_{t,a,b}\in\mathcal{F}_t$, 且由定理 4.1 知, $\mathbb{P}(H_{t,a,b})=0$. 令

$$H_t=\bigcup_{a<b,a,b\in Q}H_{t,a,b}\,,\quad H=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n\,,$$

其中 Q 为有理数全体. 则 $H_t\in\mathcal{F}_t$, $H_t\uparrow H$, 且 $\mathbb{P}(H)=0$. 若 $\omega\notin H$, 则对一切 $t\geq 0(t>0)$, $\lim_{t\in D,s\downarrow\downarrow t}X_t(\omega)$ $(\lim_{t\in D,s\uparrow\uparrow t}S_s(\omega))$ 存在且有穷. 如果 $t\longmapsto X_t(\omega)$ 右连续, 则对一切 $t>0$,

$$\lim_{s\in D,s\uparrow\uparrow t}X_s(\omega)=\lim_{s\in\mathbb{R}_+,s\uparrow\uparrow t}X_s(\omega). \qquad ∎$$

定理 4.3 设 $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)$ 右连续，(X_t) 为一 $\mathbb{F}$- 上鞅. 为要 (X_t) 有右连续适应修正，必须且只需 $t\longmapsto \mathbb{E}[X_t]$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的右连续函数.

证明 我们沿用定理 4.2 证明中的记号. 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$，令 $H_{t+}=\bigcap_{s>t}H_t$，则 $H_{t+}\in\mathcal{F}_t$. 如果 $\omega\notin H_{t+}$，则存在 $t_1>t$，使得 $\omega\notin H_{t_1}$，故由 H_{t_1} 的定义知，极限 $\lim_{s\in D,s\downarrow\downarrow t}X_t(\omega)$ 存在且有穷. 令

$$\overline{X}_t(\omega)=\begin{cases}\lim_{s\in D,s\downarrow\downarrow t}X_t(\omega), & \omega\notin H_{t+},\\ 0, & \omega\in H_{t+}.\end{cases}$$

则显然 $(\overline{X}_t)$ 为 $\mathbb{F}$- 适应过程. 设 $s<t,s,t\in\mathbb{R}_+$. 令 $s_n\in D$，$s_n<t$ 且 $s_n\downarrow\downarrow s$. 又令 $t_n\in D,t_n\downarrow\downarrow t$，则对任何 $A\in\mathcal{F}_s$，我们有

$$\int_A X_{s_n}d\mathbb{P}\geq\int_A X_{t_n}d\mathbb{P}\,,\quad \int_A X_s d\mathbb{P}\geq\int_A X_{s_n}d\mathbb{P}.$$

由于 (X_{s_n}) 及 (X_{t_n}) 一致可积 (定理 2.4)，在上面两个不等式中令 $n\to\infty$ 得

$$\int_A \overline{X}_s d\mathbb{P}\geq\int_A \overline{X}_t d\mathbb{P}\,,\quad \int_A X_s d\mathbb{P}\geq\int_A \overline{X}_s d\mathbb{P}.$$

这表明 $(\overline{X}_t)$ 为 $\mathbb{F}$- 上鞅，且 $X_s\geq\overline{X}_s$, a.s.. 但由于 (X_{s_n}) 一致可积，故有 $\mathbb{E}[\overline{X}_s]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{s_n}]$. 因此，为要 $X_s=\overline{X}_s$ a.s.，或等价地，$\mathbb{E}[X_s]=\mathbb{E}[\overline{X}_s]$，必须且只需 $\mathbb{E}[X_s]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{s_n}]$. 由于 $t\longmapsto\mathbb{E}[X_t]$ 是单调非增函数，这等价于它在 s 处右连续，因此，如果函数 $t\longmapsto\mathbb{E}[X_t]$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上右连续，则上鞅 $(\overline{X}_t)$ 为上鞅 (X_t) 的右连续适应修正. 反之，如果存在 (X_t) 的右连续修正 (Y_t)，则有 $\mathbb{E}[X_t]=\mathbb{E}[Y_t]$. 根据上述论证，$t\longmapsto\mathbb{E}[Y_t]=\mathbb{E}[X_t]$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的右连续函数. ∎

系 4.4 设 $\mathbb{F}$ 右连续，则一切 $\mathbb{F}$- 鞅有右连续适应修正.

下一定理可由定理 1.8 直接推得.

定理 4.5 设 (X_t) 为一右连续的鞅或非负下鞅，令 $X^* = \sup_{t\geq 0}|X_t|$.

1) 对任何 $\lambda > 0$ 及 $p \geq 1$ 有

$$\mathbb{P}(X^* \geq \lambda) \leq \lambda^{-p} \sup_t \mathbb{E}[|X_t|^p] . \tag{4.3}$$

2) 对任何 $p > 1$ 有

$$\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t\geq 0} \|X_t\|_p . \tag{4.4}$$

关于收敛定理，我们只叙述结果，它们是离散时间情形相应结果的推论.

定理 4.6 设 (X_t) 为一右连续上鞅，$\sup_t \mathbb{E}[|X_t^-|] < \infty$ (或等价地，$\sup_t \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$), 则当 $t \to \infty$ 时，X_t a.s 收敛于一可积随机变量 X_∞. 若 (X_t) 为非负上鞅，则 $(X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+)$ 为上鞅.

定理 4.7 设 (X_t) 为一致可积右连续上鞅 (鞅), 则当 $t \to \infty$ 时，X_t a.s. 及 L^1 收敛于一可积随机变量 X_∞, 且 $(X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+)$ 为上鞅 (鞅).

系 4.8 设 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续，令 ξ 为一可积随机变量，(ξ_t) 为鞅 $(\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t)])$ 的右连续适应修正，则当 $t \to \infty$ 时，ξ_t a.s. 且 L^1 收敛于 $\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_\infty]$.

定理 4.9 设 $(X_t)_{t>0}$ 关于 $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ 为一右连续上鞅. 令 $\mathcal{F}_0 = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s$. 如果 $\sup_{t>0} \mathbb{E}[X_t] < \infty$, 则 $t \downarrow 0$ 时 X_t a.s. 及 L^1 收敛于一 $\mathcal{F}_0$- 可测随机变量 X_0, 且 $(X_t)_{t\geq 0}$ 为 $\mathbb{F}$- 上鞅.

现在我们要对连续时间右闭鞅 (上鞅) 建立 Doob 停止定理. 为此需要引进停时的概念. 但关于停时的详细讨论要在第二章中给出.

定义 4.10 在 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 中取值的随机变量 T 叫做 $\mathbb{F}$- 停时或可选时，如果对一切 $t \geq 0$, $[T \leq t] \in \mathcal{F}_t$.

对每个停时 T, 令

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \in \mathbb{R}_+, A[T \leq t] \in \mathcal{F}_t\} . \tag{4.5}$$

这是一个 σ- 域，称为 T前事件 σ- 域.

定理 4.11 设 $(X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+)$ 为一右连续鞅 (上鞅), S, T 为两个停时，且 $S \le T$. 则 X_S, X_T 可积，且

$$\mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] = X_S (\le X_S) \quad \text{a.s.}. \tag{4.6}$$

证明 只证上鞅情形. $\forall n \in \mathbb{N}$, 令 $D_n = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \cdots, +\infty\}$, 则 $(X_t, t \in D_n)$ 为 $(\mathcal{F}_t, t \in D_n)$- 上鞅. 令

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k-1}{2^n} \le S < \frac{k}{2^n}]} + (+\infty) I_{[S=+\infty]} ,$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k-1}{2^n} \le T < \frac{k}{2^n}]} + (+\infty) I_{[T=+\infty]} ,$$

则易证 S_n, T_n 为 $(\mathcal{F}_t, t \in D_n)$- 停时，且 $S_n \downarrow S$, $T_n \downarrow T$. 由定理 3.2

$$\mathbb{E}[X_{T_n} \mid \mathcal{F}_{S_n}] \le X_{S_n} \quad \text{a.s.} ,$$

特别地，对 $\forall A \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_n}$ 有

$$\int_A X_{T_n} d\mathbb{P} \le \int_A X_{S_n} d\mathbb{P} . \tag{4.7}$$

但由定理 2.4 知 (X_{S_n}) 及 (X_{T_n}) 一致可积，故由 (4.7) 得 (4.6). ∎

下一定理是 Doob 停止定理的加强形式，其证明与定理 3.3 完全类似，故略去.

定理 4.12 设 $(X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+)$ 为一右连续鞅 (上鞅), S, T 为两个停时，则

$$\mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] = X_{T \wedge S} (\le X_{T \wedge S}) \quad \text{a.s.}. \tag{4.8}$$

系 4.13 设 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续，ξ 为一可积随机变量，S, T 为两个停时，则

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_T] \mid \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_{S \wedge T}] \quad \text{a.s.}. \tag{4.9}$$

证明 令 (X_t) 为鞅 $(\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t])$ 的右连续适应修正，$X_\infty = \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_\infty]$, 则由 (4.8) 即得 (4.9). ∎

第二章 随机过程一般理论

随机过程一般理论主要研究随机过程的可测性结构，它是测度论的精细化. 本章前三节内容不涉及概率测度. §4 介绍截口定理，该定理提供了通过随机过程在停时的取值来研究随机过程轨道性质的途径. §5 介绍的可测过程的投影是概率论中的条件期望的推广. §6 通过测度的投影来定义增过程的对偶投影.

§1. 停 时

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间， $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 为一单调非降的 $\mathcal{F}$ 的子 $\sigma-$ 域流. 令 $\mathcal{F}_\infty=\vee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$ 及

$$\mathcal{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s\ ,\ t\geq 0\,,$$

$$\mathcal{F}_{t-}=\vee_{s<t}\mathcal{F}_s=\sigma(\bigcup_{s<t}\mathcal{F}_s)\ ,t>0\,.$$

我们约定 $\mathcal{F}_{0-}=\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_{\infty-}=\mathcal{F}_\infty$. 流 $\mathbb{F}$ 称为 右连续的, 如果对每个 $t\geq 0,\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$. 显然，流 $\mathbb{F}_+=(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ 是右连续的.

定义 1.1 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一 $\overline{\mathbb{R}}_+$- 值随机变量 T 称为 $\mathbb{F}$- 停时, 若对每个 $t\geq 0$, $[T\leq t]\in\mathcal{F}_t$; 称为 $\mathbb{F}$-宽停时, 若对每个 $t>0$, $[T<t]\in\mathcal{F}_t$, 或等价地， $T\wedge t\in\mathcal{F}_t$.

显然， $\mathbb{F}$- 宽停时与 $\mathbb{F}_+$- 停时是同一概念. 特别， $\mathbb{F}$- 停时也是 $\mathbb{F}$- 宽停时. 下面，一切停时及宽停时都是对 $\mathbb{F}$ 而言的.

读者不难证明下一定理.

定理 1.2 1) 设 S,T 为停时，则 $S\wedge T, S\vee T$ 为停时.

2) 设 (S_n) 为停时列，则 $\wedge_n S_n$ 为停时， $\vee_n S_n$ 为宽停时. 若 (S_n) 为尾定的，即对每个 $\omega\in\Omega$, 存在自然数 n_ω, 使得 $n\geq n_\omega$

时，有 $S_n(\omega)=S_{n_\omega}(\omega)$, 则 $\wedge_n S_n$ 为停时.

定义 1.3 设 T 为一停时，令

$$\mathcal{F}_{T+}=\{A\in\mathcal{F}_\infty:\forall t\in\mathbb{R}_+, A[T\le t]\in\mathcal{F}_{t+}\}\ , \tag{1.1}$$

$$\mathcal{F}_{T}=\{A\in\mathcal{F}_\infty:\forall t\in\mathbb{R}_+, A[T\le t]\in\mathcal{F}_{t}\}\ , \tag{1.2}$$

$$\mathcal{F}_{T-}=\mathcal{F}_0\vee\sigma\{A[t<T]:A\in\mathcal{F}_t, t\in\mathbb{R}_+\}, \tag{1.3}$$

则 $\mathcal{F}_{T+},\mathcal{F}_T,\mathcal{F}_{T-}$ 都为 σ- 域.

设 T 为一宽停时，则仍可按 (1.1),(1.3) 分别定义 $\mathcal{F}_{T+}$ 及 $\mathcal{F}_{T-}$, 而 (1.2) 定义的 $\mathcal{F}_T$ 不一定是 σ- 域了 (例如，若对某个 $t\in\mathbb{R}_+$, $[T\le t]\notin\mathcal{F}_t$, 则 $\Omega\notin\mathcal{F}_T$).

显然对每个停时 T, 我们有 $\mathcal{F}_{T-}\subset\mathcal{F}_T\subset\mathcal{F}_{T+}$; 对每个宽停时 T, 我们有 $\mathcal{F}_{T-}\subset\mathcal{F}_{T+}$. 如果 $T\equiv t$ 为常值， $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$, 则 T 为停时，且 $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_{T-}=\mathcal{F}_{t-}$, $\mathcal{F}_{T+}=\mathcal{F}_{t+}$.

下一定理罗列了有关 σ- 域 $\mathcal{F}_T,\mathcal{F}_{T-}$ 及 $\mathcal{F}_{T+}$ 的一些主要性质，其证明从略.

定理 1.4 在下面的叙述中，S,T 表示停时，(S_n) 为停时列，R,U 表示宽停时，(R_n) 为宽停时列.

1) R 为 $\mathcal{F}_{R-}$- 可测.

2) $S\le T\Rightarrow\mathcal{F}_S\subset\mathcal{F}_T$; $R\le U\Rightarrow\mathcal{F}_{R-}\subset\mathcal{F}_{U-},\mathcal{F}_{R+}\subset\mathcal{F}_{U+}$.

3) $\mathcal{F}_S\bigcap\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_{S\wedge T}$, $\mathcal{F}_S\vee\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_{S\vee T}$.

4) $A\in\mathcal{F}_{S\vee T}\Rightarrow A[S\le T]\in\mathcal{F}_T$, $A[S<T]\in\mathcal{F}_T$, $AS=T\in\mathcal{F}_{S\wedge T}$.

5) $A\in\mathcal{F}_{R+}\Rightarrow A[R<U]\in\mathcal{F}_{U-}$.

6) $A\in\mathcal{F}_\infty\Rightarrow A[R=\infty]\in\mathcal{F}_{R-}$.

7) $R\le U$, 且在 $[R<\infty]$ 上 $R<U\Rightarrow\mathcal{F}_{R+}\subset\mathcal{F}_{U-}$.

8) $S\le T$, 且在 $[T>0]$ 上 $S<T\Rightarrow\mathcal{F}_S\subset\mathcal{F}_{T-}$.

9) 若 $R=\vee_n R_n, U=\wedge_n R_n$, 则

$$\mathcal{F}_{R-}=\vee_n\mathcal{F}_{R_n-}\ ,\ \mathcal{F}_{U+}=\bigcap_n\mathcal{F}_{R_n+}\ .$$

10) 若 $S=\vee_n S_n$, 且对每个 n, 在 $[0<S_n<\infty]$ 上有 $S_n<S$, 则

$$\mathcal{F}_{S-}=\vee_n\mathcal{F}_{S_n}\ .$$

11) 对每个自然数 $n \geq 1$, 令

$$U_n \doteq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k-1}{2^n} \leq U < \frac{k}{2^n}]} + (+\infty) I_{[U=+\infty]} .$$

则 U_n 为停时, 且 $U_n \downarrow U$.

12) 设 $A \in \mathcal{F}_T$. 令

$$T_A = T I_A + (+\infty) I_{A^c} ,$$

则 T_A 为停时, 称 T_A 为 T 到 A 上的局限. 我们有

$$\mathcal{F}_{T_A} \cap A = \mathcal{F}_T \cap A , \qquad \mathcal{F}_{T_A} \cap A^c = \mathcal{F}_\infty \cap A^c ,$$
$$\mathcal{F}_{T_{A-}} \cap A = \mathcal{F}_{T-} \cap A , \qquad \mathcal{F}_{T_{A-}} \cap A^c = \mathcal{F}_\infty \cap A^c .$$

§2. 循序可测、可选与可料过程

在这一节里我们将研究三类最常用的可测过程: 循序可测、可选与可料过程.

定义 2.1 设 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 为一随机过程, 称 X 为可测过程, 如果作为 (ω, t) 的函数, $X_t(\omega)$ 为 $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$- 可测; 称 X 为循序 (可测) 过程, 如果对一切 $t \in \mathbb{R}_+$, X 限于 $\Omega \times [0, t]$ 为 $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0, t])$-可测.

显然, 循序过程为可测且适应的, 但逆命题不成立.

定理 2.2 右连续 (左连续) 适应过程为循序过程.

证明 设 $X = (X_t)$ 为右连续适应过程. 对每个给定的 $t \geq 0$, 定义 $\Omega \times [0, t]$ 上一列过程 $X^{(n)}$ 如下:

$$X_s^{(n)}(\omega) = X_0(\omega) I_{[s=0]} + \sum_{k=1}^{2^n} X_{\frac{kt}{2^n}}(\omega) I_{[\frac{(k-1)t}{2^n} < s \leq \frac{kt}{2^n}]}, \; s \in [0, t],$$

则限于 $\Omega \times [0, t]$, $X^{(n)}$ 为 $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0, t])$-可测, 且在 $\Omega \times [0, t]$ 上,

$$\lim_{n \to \infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega) .$$

故限于 $\Omega\times[0,t]$, X 为 $\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t])$-可测, 这表明 X 为循序过程. X 为左连续情形证明类似. ∎

定理 2.3 设 (X_t) 为一循序过程, 则对一切停时 T, $X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathcal{F}_T$- 可测.

证明 由于对每个 $t\geq 0$, $T\wedge t\in\mathcal{F}_t$, 故 $X_{T\wedge t}$ 作为 $(\Omega,\mathcal{F}_t)$ 到 $(\Omega\times[0,t],\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t]))$ 中的可测映射 $\omega\longmapsto(\omega,T(\omega)\wedge t)$ 及 $(\Omega\times[0,t],\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}([0,t]))$ 到 $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 中的可测映射 $(\omega,s)\longmapsto X_s(\omega)$ 的复合, 为 $\mathcal{F}_t$- 可测的.

设 $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 则对任何 $t\geq 0$,

$$[X_T I_{[T<\infty]}\in A][T\leq t]=[X_{T\wedge t}\in A][T\leq t]\in\mathcal{F}_t\ .$$

又 $X_T I_{[T<\infty]}=\lim_{n\to\infty}X_{T\wedge n}I_{[T\leq n]}$, 从而 $X_T I_{[T<\infty]}\in\mathcal{F}_\infty$, 故 $[X_T I_{[T<\infty]}\in A]\in\mathcal{F}_T$, 即 $X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathcal{F}_T$- 可测. ∎

定义 2.4 设 U,V 为 Ω 上两个 $\overline{\mathbb{R}}_+$- 值函数, 且 $U\leq V$ 定义

$$[\![U,V]\!]=\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ : U(\omega)\leq t\leq V(\omega)\}\,,$$
$$[\![U,V[\![=\{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ : U(\omega)\leq t< V(\omega)\}\,.$$

类似地, 可定义 $]\!]U,V]\!]$ 和 $]\!]U,V[\![$. 它们统称为 随机区间. $[\![U,U]\!]$ 简记为 $[\![U]\!]$, 称为 U 的 图.

定义 2.5 $\Omega\times\mathbb{R}_+$ 上使得全体右连左极适应过程为可测的最小 σ- 域称为 可选 σ- 域, 记为 $\mathcal{O}$. $\Omega\times\mathbb{R}_+$ 上的使得全体左连续适应过程为可测的最小 σ- 域称为 可料 σ- 域, 记为 $\mathcal{P}$. 一随机集或过程称为 可选的 (可料的), 如果它是 $\mathcal{O}(\mathcal{P})$- 可测的.

由定理 2.2 知, 可选过程或可料过程都为循序过程, 从而为适应过程.

定理 2.6 停时全体记为 $\mathcal{T}$, 则

$$\mathcal{O}=\sigma\{[\![S,\infty[\![: S\in\mathcal{T}\}.$$

证明 令 $\mathcal{C}=\{[\![S,\infty[\![: S\in\mathcal{T}\}$, 由于 $\mathcal{C}\subset\mathcal{O}$, 有 $\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{O}$. 只需证 $\mathcal{O}\subset\sigma(\mathcal{C})$. 设 (X_t) 为一右连左极适应过程. 往证 (X_t) 为

$\sigma(\mathcal{C})$- 可测. 给定 $\epsilon > 0$, 令 $T_0^\epsilon = 0$, 并归纳定义 $(T_n^\epsilon)_{n\geq 1}$ 如下:

$$T_{n+1}^\epsilon(\omega) = \inf\{t: t > T_n^\epsilon(\omega), |X_{T_n^\epsilon(\omega)}(\omega) - X_t(\omega)| \geq \epsilon \quad \text{或} \mid X_{T_n^\epsilon(\omega)}(\omega) - X_{t-}(\omega) \mid \geq \epsilon\}. \tag{2.1}$$

我们用归纳法证明一切 T_n^ϵ 为停时. 注意 (2.1) 右边的集合是 $\mathbb{R}_+$ 中对右极限封闭的集, 从而对任何 $r \in \mathbb{R}_+$, 我们有

$$\begin{aligned}[T_{n+1}^\epsilon = r] &\subset [T_n^\epsilon < r]([|X_{T_n^\epsilon} - X_r| \geq \epsilon] \cup [|X_{T_n^\epsilon} - X_{r-}| \geq \epsilon]) \\ &\subset [T_{n+1}^\epsilon \leq r].\end{aligned} \tag{2.2}$$

令 Q 记有理数全体, 由 (2.2) 得

$$\begin{aligned}[T_{n+1}^\epsilon \leq t] &= \bigcup_{r\leq t}\{[T_n^\epsilon < r]([|X_{T_n^\epsilon} - X_r| \geq \epsilon] \cup [|X_{T_n^\epsilon} - X_{r-}| \geq \epsilon])\} \\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{r\in Q_t}\{[T_n^\epsilon < r][|X_{T_n^\epsilon} - X_r| > \epsilon(1 - \frac{1}{m})]\},\end{aligned}$$

其中 $Q_t = (Q \cap [0,t]) \cup \{t\}$. 假定 T_n^ϵ 为停时, 由定理 2.3 及定理 1.3 知 $[T_{n+1}^\epsilon \leq t] \in \mathcal{F}_t$, 从而 T_{n+1}^ϵ 也是停时.

显然 (T_n^ϵ) 单调增, 且当 $T_{n+1}^\epsilon < \infty$ 时, $T_{n+1}^\epsilon(\omega) > T_n^\epsilon(\omega)$. 此外有 $|X_{T_{n+1}^\epsilon(\omega)}(\omega) - X_{T_n^\epsilon(\omega)}(\omega)| \geq \epsilon$ 或 $|X_{T_{n+1}^\epsilon(\omega)-}(\omega) - X_{T_n^\epsilon(\omega)}(\omega)| \geq \epsilon$. 由于 $X_\cdot(\omega)$ 在 $]0,\infty[$ 上极限存在且有穷, 故 $T_n^\epsilon(\omega))_{n\geq 1}$ 没有有穷聚点, 从而 $T_n^\epsilon(\omega) \uparrow +\infty$. 令

$$X^\epsilon = \sum_{n=0}^{\infty} X_{T_n^\epsilon} I_{[\![T_n^\epsilon, T_{n+1}^\epsilon[\![}.$$

则 X^ϵ 为 $\sigma(\mathcal{C})$- 可测. 由于 $\forall t \in [T_n^\epsilon(\omega), T_{n+1}^\epsilon(\omega)[$, $|X_{T_n^\epsilon}(\omega) - X_t(\omega)| < \epsilon$, 故对一切 $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, 有 $X_t^\epsilon(\omega) - X_t(\omega)| < \epsilon$ 从而 X 也 $\sigma(\mathcal{C})$- 可测. ∎

定理 2.7 令

$$\mathcal{C}_1=\{A\times\{0\}:A\in\mathcal{F}_0\}\cup\left\{A\times]s,t]:0<s<t,s,t\in Q_+,A\in\bigcup_{r<s}\mathcal{F}_r\right\},$$

$$\mathcal{C}_2=\{A\times\{0\}:A\in\mathcal{F}_0\}\cup\left\{A\times[s,t[:0<s<t,s,t\in Q_+,A\in\bigcup_{r<s}\mathcal{F}_r\right\},$$

$$\mathcal{C}_3=\{A\times\{0\}:A\in\mathcal{F}_0\}\cup\{]\!]S,\infty[\![:S\in\mathcal{T}\},$$

则 $\sigma(\mathcal{C}_1)=\sigma(\mathcal{C}_2)=\sigma(\mathcal{C}_3)=\mathcal{P}$. 特别, $\mathcal{P}\subset\mathcal{O}$.

证明 首先, $\mathcal{C}_1\subset\mathcal{P}$ 是显然的, 故 $\sigma(\mathcal{C}_1)\subset\mathcal{P}$. 另一方面, 对每个左连续适应过程 (X_t), 令

$$X_t^{(n)}=X_0I_{[t=0]}+\sum_{k=0}^{\infty}X_{\frac{k}{2^n}}I_{[\frac{k}{2^n}<t\le\frac{k+1}{2^n}]},$$

则 $\lim_{n\to\infty}X_t^{(n)}=X_t$. 易见, 对每个 $n\ge1$, $X^{(n)}$ 为 $\sigma(\mathcal{C}_1)$- 可测, 故 X 亦然. 这表明 $\mathcal{P}\subset\sigma(\mathcal{C}_1)$, 从而 $\sigma(\mathcal{C}_1)=\mathcal{P}$. 但是容易看出

$$\mathcal{C}_1\subset\sigma(\mathcal{C}_2),\mathcal{C}_2\subset\sigma(\mathcal{C}_1),\mathcal{C}_1\subset\sigma(\mathcal{C}_3),\sigma(\mathcal{C}_3)\subset\mathcal{P},$$

故有 $\sigma(\mathcal{C}_3)=\sigma(\mathcal{C}_2)=\sigma(\mathcal{C}_3)=\mathcal{P}$. 最后因 $\mathcal{C}_2\subset\mathcal{O}$, 有 $\mathcal{P}\subset\mathcal{O}$. ∎

系 2.8 设 (X_t) 为可料过程, T 为宽停时, 则 $X_TI_{[T<\infty]}\in\mathcal{F}_{T-}$, X^T 为可料过程.

证明 前一结论由 $\sigma(\mathcal{C}_3)=\mathcal{P}$ 及单调类定理推得; 后一结论由如下表达式推得

$$X^T=XI_{[\![0,T]\!]}+X_TI_{]\!]T,\infty[\![}.$$ ∎

定义 2.9 Ω 上一 $\overline{\mathbb{R}}_+$- 值函数 T 称为 可料时, 如果 $[\![T,\infty[\![$ 为可料集. 一停时 T 称为 可及时, 如果存在一列可料时 (T_n), 使得 $[\![T]\!]\subset\bigcup_n[\![T_n]\!]$.

令 $\mathcal{A}$ 为可及时全体, 由 $\{[\![S,\infty[\![:S\in\mathcal{A}\}$ 在 $\Omega\times\mathbb{R}_+$ 上生成的 σ- 域叫做 可及 σ- 域.

显然，可料时为停时，从而为可及时．一常值停时是可料时．此外，设 T 为一宽停时，易证 $]T,\infty[$ 为可料集，从而 T 为可料时 (停时)，当且仅当 $[\![T]\!]$ 为可料 (可选) 集．

下一定理罗列了有关可料时的一些主要性质，其证明从略．

定理 2.10 1) 设 (S_n) 为一可料时序列，则 $\vee_n S_n$ 为可料时．如果 (S_n) 是尾定的，则 $\wedge_n S_n$ 为可料时．

2) 设 S 为一可料时，T 为一停时，则

$$A \in \mathcal{F}_{(S\vee T)-} \Rightarrow A[S \le T] \in \mathcal{F}_{T-},\ A[S = T] \in \mathcal{F}_{(S\wedge T)-}.$$

3) 设 S,T 为可料时，则 $\mathcal{F}_{S-} \cap \mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_{(S\wedge T)-}$, $\mathcal{F}_{S-} \vee \mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_{(S\vee T)-}$.

4) 设 (S_n) 为尾定的可料时序列，则

$$\mathcal{F}_{(\vee_n S_n)-} = \vee_n \mathcal{F}_{S_n-}\ ,\quad \mathcal{F}_{(\wedge_n S_n)-} = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n-}\ .$$

5) 设 S 为一可料时，则对一切 $A \in \mathcal{F}_{S-}$, S_A 为可料时．

定理 2.11 设 B 为一循序集 (可料集)，且包含在一列停时 (可料时) 的图的并中，则 B 可表示为一列停时 (可料时) 图的并．特别，设 T 为 Ω 上一 $\overline{\mathbb{R}}_+$- 值函数，若 $[\![T]\!]$ 为循序集 (可料集)，则 T 为可料时 (停时)．

证明 设 $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}[\![T_n]\!]$,$(T_n)$ 为停时列，令

$$L_n = \{\omega:\ (\omega, T_n(\omega) \in B\}\ ,$$

则 $I_{L_n} = I_B(T_n)I_{[T_n<\infty]}$. 由定理 2.3, $L_n \in \mathcal{F}_T$, 故 $(T_n)_{L_n}$ 为停时，显然有 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\![(T_n)_{L_n}]\!]$. 可料情形证明类似． ∎

定理 2.12 设 A 为一列停时 (可料时) 图的并，则存在一列停时 (可料时)(T_n)，使得 $A = \bigcup_n [\![T_n]\!]$, 且 $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$, $n \ne m$.

证明 只证可料情形．设 (S_n) 为一列可料时，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\![S_n]\!]$. 令 $T_1 = S_1$, 对 $n \ge 2$, 令

$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n-1}[S_k \ne S_n],\quad T_n = (S_n)_{B_n}\ ,$$

则 $B_n \in \mathcal{F}_{S_n-}$, T_n 为可料时，$[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$, 当 $n \neq m$, 且 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\![T_n]\!]$. ∎

定理 2.13 设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 为一右连左极适应过程，则存在一列严格正的停时 (T_n), 使得

$$
\begin{aligned}
[\Delta X \neq 0] &= \{(\omega, t) : 0 < t < +\infty, X_t(\omega) \neq X_{t-}(\omega)\} \\
&= \bigcup_n [\![T_n]\!] \, .
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

证明 令 $\epsilon = \frac{1}{k}$, 按 (2.1) 定义 $T_n^{\frac{1}{k}}$, 往证 $[\Delta X \neq 0] \subset \bigcup_{n,k\geq 1}[\![T_n^{\frac{1}{k}}]\!]$. 设 $0 < t < +\infty, |X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)| \geq \frac{2}{k}$, 则对某个 $n \geq 1$, 有

$$
T_n^{\frac{1}{k}}(\omega) \leq t < T_{n+1}^{\frac{1}{k}}(\omega) \, .
$$

对一切 $s \in]T_n^{\frac{1}{k}}(\omega), T_{n-1}^{\frac{1}{k}}(\omega)[$, 由 (2.1) 有

$$
| X_s(\omega) - X_{T_n^{\frac{1}{k}}(\omega)}(\omega) | < \frac{1}{k}, \; | X_{s-}(\omega) - X_{T_n^{\frac{1}{k}}(\omega)}(\omega) | < \frac{1}{k}.
$$

因此 $|X_s(\omega) - X_{s-}(\omega)| < \frac{2}{k}$. 这表明必有 $t = T_n^{\frac{1}{k}}(\omega)$, 故由定理 2.11 推得本定理的结论. ∎

下一定理给出了右连左极适应过程为可料过程的刻画.

定理 2.14 设 $X = (X_t)$ 为一右连左极适应过程，则为要 X 可料，必须且只需 X 满足下列条件：

1) 存在一列严格正的可料时 (T_n), 使得 $[\Delta X \neq 0] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$,

2) 对每个可料时 T, $X_T I_{[T<\infty]} \in \mathcal{F}_{T-}$.

证明 必要性. 设 X 可料，则用定理 2.6 的证明可归纳地证明 T_n^ϵ 的图为可料集，从而 T_n^ϵ 为可料时. 由定理 2.13 的证明可知条件 1) 成立. 条件 2) 由系 2.8 推得.

充分性. 设 X 满足条件 1) 及 2). 由定理 1.12, 不妨设 (T_n) 的图互不相交，故有

$$
X = X_- I_{\bigcap_n [\![T_n]\!]^c} + \sum_n X_{T_n} I_{[\![T_n]\!]} \, .
$$

由于 $X_{T_n}I_{T_n<\infty]}\in\mathcal{F}_{T_n-}$,

$$X_{T_n}I_{[T_n]}=X_{T_n}I_{[T_n<\infty]}(I_{[\![T_n,\infty[\![}-I_{]\!]T_n,\infty[\![})$$

为可料过程, 从而 X 为可料过程. ∎

定理 2.15 设 X 为一可选过程, 则存在一可料过程 Y, 使得 $[X\neq Y]$ 含于 (从而等于) 一列停时图的并.

证明 令 $\mathcal{C}=\{[\![S,T[\![: S,T\in\mathcal{T}\}$, 则 $\mathcal{C}$ 为 π- 类. 若 $X=I_{[\![S,T[\![}$, 令 $Y=I_{]\!]S,T]\!]}$, 则 $[X\neq Y]\subset[\![S]\!]\bigcup[\![T]\!]$. 故由单调类定理推得定理结论. ∎

§3. 有限变差过程

定义 3.1 一过程称为 增过程, 如果它的所有轨道为 $\mathbb{R}_+$ 上非负有限值右连续增函数. 两个增过程之差称为 有限变差过程.

显然, 有限变差过程为右连左极过程, 从而适应有限变差过程是可选过程.

设 $A=(A_t)_{t\geq 0}$ 为一有限变差过程, 对每个 $\omega\in\Omega$, $\mathbb{R}_+$ 上的有限变差函数 $A_\cdot(\omega)$ 可以唯一地分解为 $A_\cdot(\omega)=A_\cdot^c(\omega)+A_\cdot^d(\omega)$, 其中 $A_\cdot^c(\omega)$ 为连续有限变差函数, $A_\cdot^d(\omega)$ 为纯断有限变差函数:

$$A_t^d(\omega)=\sum_{0<s\leq t}\Delta A_s(\omega)\,. \tag{3.1}$$

我们称过程 A^c 为 A 的 连续部分, 称过程 A^d 为 A 的 纯断部分(或跳部分).

设 A 为有限变差过程, 称 A 为 纯断的, 如果 $A^c=0$.

下一定理描绘了适应及可料有限变差过程的结构.

定理 3.2 设 A 为一适应 (可料) 有限变差过程, 则 A^d 亦然. 此外, 存在一列互不相交的严格正停时 (可料时), 使得

$$A_t^d=\sum_n\Delta A_{S_n}I_{[S_n\leq t]} \tag{3.2}$$

(约定 $\Delta A_\infty = 0$).

证明 只证 A 为可料情形. 由定理 2.12 及 2.14 知, 存在一列图互不相交的严格正可料时 (S_n), 使得 $[\Delta A \neq 0] \subset \bigcup_n [\![S_n]\!]$. 由于 (3.1) 中的级数绝对收敛, 从而与被求和各项的次序无关, 于是有 (3.2). 由于 ΔA 可料, 故 $\Delta A_{S_n} \in \mathcal{F}_{S_n-}$, 从而由定理 2.10.5) 知, A^d 为可料过程. ∎

系 3.3 设 $A = (A_t)$ 为一适应 (可料) 有限变差过程, 则 A 的变差过程 $B_t = |A_0| + \int_0^t |dA_s|$ 为适应 (可料) 增过程, 且 A 可表为两个适应 (可料) 增过程之差.

下面我们研究可测过程对有限变差过程按轨道的 Lebesgue-Stieltjes 积分.

定义 3.4 设 $H = (H_t)$ 为一可测过程, $A = (A_t)$ 为一有限变差过程. 如果对一切 $\omega \in \Omega$, 对一切 $t \geq 0$, $H_\cdot(\omega)$ 关于 $A_\cdot(\omega)$ 在 $[0,t]$ 上 Lebesgue-Stieltjes 积分存在且有穷, 则称 H 关于 A 可积. 这时, 定义

$$B_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega) dA_s(\omega) = H_0 A_0 + \int_0^t H_s(\omega) dA_s(\omega) ,$$

称 (B_t) 为 H 关于 A 的 (不定) 积分, 记为 $H.A$. 显然, $H.A$ 仍为有限变差过程. 这里及今后, 我们约定 $dA_s(\omega)$ 在 $s=0$ 的负荷为 $A_0(\omega)$, 记号 $\int_0^t$ 表示 $\int_{]0,t]}$.

定理 3.5 设 $H = (H_t)$ 为一可测过程, $A = (A_t)$ 为一有限变差过程, 且 H 关于 A 可积.

1) 如果 H 为循序可测的, A 为适应的, 则 $H.A.$ 为适应的.

2) 如果 H 为可料的, A 为可料的, 则 $H.A.$ 为可料的.

证明 分别考虑 $H.A^c$ 及 $H.A^d$ 即可. ∎

§4. 截口定理及其应用

从本节起, 我们考虑一带域流 $\mathbb{F} = (F_t)$ 的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

流 $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)$ 称为完备的, 如果概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 本身是完备的, 且 $\mathcal{F}_0$ 包含一切 $\mathbb{P}$- 零概集. 若流 $\mathbb{F}$ 既完备又右连续, 则称 $\mathbb{F}$ 满足通常条件.

任一流 $\mathbb{F}$ 总可完备化. 首先, 将概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 完备化, 以 $\mathcal{N}$ 记 $\mathbb{P}$- 零概集全体生成的 σ- 域. 令 $\mathbb{F}^{\mathbb{P}}=(\mathcal{F}_t\vee\mathcal{N})_{t\geq 0}$, 则 $\mathbb{F}^{\mathbb{P}}$ 是一完备流, 称为 $\mathbb{F}$ 的完备化. 易见 $\mathbb{F}^{\mathbb{P}}_+$ 满足通常条件, 它称为 $\mathbb{F}$ 的通常化. 除非有附带说明, 我们一般不假定 $\mathbb{F}$ 是完备的.

下一定理称为截口定理, 它是随机过程一般理论中的最重要结果之一. 其证明见 [HWY].

定理 4.1 设 A 是可选集 (可及集, 可料集), 则对任给 $\epsilon>0$, 存在一停时 (可及时, 可料时)T, 使得

1) $[\![T]\!]\subset A$;

2) $\mathbb{P}(T<\infty)\geq\mathbb{P}(\pi(A))-\epsilon$,

这里 $\pi(A)$ 为 A 在 Ω 上的投影.

定义 4.2 $\Omega\times\mathbb{R}_+$ 的一个子集 Λ 叫做不足道集 (关于概率测度 $\mathbb{P}$), 如果 Λ 在 Ω 上的投影 $\pi(\Lambda)$ 是 $\mathbb{P}$- 零概集. 一个过程 X 叫做不足道过程, 如果集合 $\{\omega,t):X_t(\omega\neq 0\}$ 为不足道集. 称两个过程 $X=(X_t)$, $Y=(Y_t)$无区别(记为 $X=Y$), 如果 $\{(\omega,t):X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$ 为不足道集. 若 $\{(\omega,t):X_t(\omega)>Y_t(\omega)\}$ 为不足道集, 则记为 $X\leq Y$.

今后, 我们将两个无区别过程视为同一过程.

下面我们给出截口定理的一些应用.

定理 4.3 设 $X=(X_t)$,$Y=(Y_t)$ 为两个可选 (可料) 过程. 如果对每个有界停时 (可料时)T, 有 $X_T\leq Y_T$ a.s., 则 $X\leq Y$.

证明 只讨论可选情形. 我们采用反证法. 设 $A=\{(\omega,t):X_t(\omega)>Y_t(\omega)\}$ 是非不足道集. 由于 A 是可选集, 故由定理 4.1 存在停时 S, 使得 $[\![S]\!]\subset A$, 且 $\mathbb{P}(S<\infty)>0$. 取常数 $c>0$, 使得 $\mathbb{P}(S\leq c)>0$, 令 $T=S\wedge c$, 则 T 为有界停时, 且在 $[S\leq c]$ 上有 $X_t>Y_T$, 这与假定矛盾, 于是 A 必须为不足道集. 依定义, 我们

有 $X \le Y$. ∎

系 4.4 设 $X=(X_t), Y=(Y_t)$ 为两个可选 (可料) 过程. 如果对每个有界停时 (可料时)T, 有 $X_T=Y_T$ a.s., 则 X 与 Y 无区别.

一宽停时 (T_n) 称为 (a.s.)可预报的, 如果存在一宽停时的上升列 (T_n), 使得在 $[T>0]$ 上, 对每个 n 有 $T_n<T$ (a.s.), 且 $\lim_n T_n = T$ (a.s.).

下一定理是截口定理的一个重要应用. 由于证明比较繁, 这里略去不证, 读者可参看 [HWY].

定理 4.5 一切可料时是 a.s. 可预报的.

定义 4.6 设 T 为一停时, 称 T 为 绝不可及时, 如果对一切可料时 S, 有 $\mathbb{P}(T=S<\infty)=0$.

定理 4.7 设 T 为一停时, 则存在 a.s. 唯一的 $A\subset[T<\infty], A\in\mathcal{F}_{T-}$, 使得 T_A 为可及时, T_{A^c} 为绝不可及时.

T_A 及 T_{A^c} 分别称为 T 的 可及部分 及 绝不可及部分, 并记为 T^a 及 T^i.

证明 令 $\mathcal{H}=\left\{\bigcup_n[S_n=T<\infty]:(S_n)\text{为一可料时}\right\}$. 显然, $\mathcal{H}\subset\mathcal{F}_{T-}$, $\mathcal{H}$ 对可列并运算封闭. 于是存在 $A\in\mathcal{H}$, 使得 $A=\text{ess sup}\mathcal{H}$. 易见 T_A 为可及时, T_{A^c} 为绝不可及时. 不难证明 A 的 a.s. 唯一性. ∎

定理 4.8 设 $X=(X_t)$ 为一右连左极适应过程, 则存在一列严格正的停时 (T_n) 满足下列条件:

i) $[\Delta X\neq 0]\subset\bigcup_n[\![T_n]\!]\}$,

ii) 每个 T_n 或为可料时, 或为绝不可及时,

iii) 当 $n\neq m$ 时, $[\![T_n]\!]\cap[\![T_m]\!]=\emptyset$.

我们今后称这样的停时列 (T_n) 为 穷举 X 的跳的标准停时列.

证明 由定理 2.13, 存在一列严格正的停时 (U_n), 满足条件 i). 由定理 4.7, 对每个 n, 存在可及时 U_n^a 及绝不可及时 U_n^i, 使得 $[\![U_n]\!]=[\![U_n^a]\!]\cup[\![U_n^i]\!]$. 于是, 由可及时定义, 存在一列严格正停时 (S_n) 满足条件 i) 和 ii). 令 $\mathcal{N}_1=\{n:S_n\text{为可料时}\},\mathcal{N}_2=\{n:$

S_n 为绝不可及时}. 定义 $T_1 = S_1$. $T_n = (S_n)_{B_n}$, $n \geq 2$, 其中

$$B_n = \begin{cases} \bigcap_{k\leq n-1, k\in\mathcal{N}_1}[S_k \neq S_n], & n \in \mathcal{N}_1, \\ (\bigcap_{k\in\mathcal{N}_1}[S_k \neq S_n] \cap (\bigcap_{k\leq n-1, k\in\mathcal{N}_2}[S_k \neq S_n], & n \in \mathcal{N}_2. \end{cases}$$

如果 S_n 为可料时, 则 $B_n \in \mathcal{F}_{S_n-}$, 从而 T_n 为可料时; 如果 S_n 为绝不可及时, 则 $B_n \in \mathcal{F}_{S_n}$, T_n 为绝不可及时. 显然 (T_n) 满足条件 i) − iii). ∎

设 $A \subset \Omega \times I\!R_+$. 令

$$D_A(\omega) = \inf\{t \in I\!R_+ : (t,\omega) \in A\},\ \omega \in \Omega,$$

称 D_A 为 A 的 初遇, 这里约定 $\inf\emptyset = +\infty$.

下一定理将在以后常被用到.

定理 4.9 设 $(\mathcal{F}_t)$ 完备. 若 A 为一循序集, 则 D_A 为宽停时. 若 A 为一循序集 (可料集), 且 $[D_A] \subset A$, 则 D_A 为停时 (可料时).

证明 令

$$A_t = \{(\omega,s) : s < t, (\omega,s) \in A\},$$
$$\overline{A}_t = \{(\omega,s) : s \leq t, (\omega,s) \in A\},$$

则 $A_t = A \cap (\Omega \times [0,t[) \in \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}(I\!R_t)$, $[D_A < t] = \pi(A_t)$, 其中 $\pi(A_t)$ 为 A_t 在 Ω 上的投影. 由于 $\mathcal{F}_t$ 关于 $I\!P$ 完备, 由有关解析集的一个结果知 (见 [HWY] 或 [Y1]),$\pi(A_t) \in \mathcal{F}_t$. 因此 D_A 为宽停时. 现设 $[\![D_A]\!] \subset A$. 则 $[D_A \leq t] = \pi(\overline{A}_t) \in \mathcal{F}_t$, 故 D_A 为停时. 若 A 为可料集, 则 $[\![D_A]\!] = A \cap [\![0, D_A]\!]$ 为可料集, 从而 D_A 为可料时. ∎

定理 4.10 设 $(\mathcal{F}_t)$ 完备, 则一切不足道可测过程为可料过程.

证明 设 X 为不足道可测过程, $A = \{\omega : \exists t \in I\!R_+ 使得 X_t(\omega) \neq 0\}$, 则 $I\!P(A) = 0$, 且 $A \in \mathcal{F}_0$. 令

$$\mathcal{C} = \{C \times [t,\infty[: C \in \mathcal{F}, t \in I\!R_+\}.$$

易见 $\mathcal{C}$ 为一 π- 类, 且 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F} \times \mathcal{B}(I\!R_+)$. 另一方面, 令

$$\mathcal{H} = \{Y \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(I\!R_+)) : YI_{A\times I\!R_+} 为可料过程\},$$

则对一切 $H \in \mathcal{C}, I_H \in \mathcal{H}$. 由单调类定理, $\mathcal{H}$ 即为 $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$- 可测过程全体. 特别, $X = XI_{A \times \mathbb{R}_+}$ 为可料过程. ▮

定理 4.11 设 $(\mathcal{F}_t)$ 完备, 则一切右连续上鞅与一右连左极上鞅无区别. 设 $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件, 则一切鞅有右连左极修正.

证明 由定理 4.10 及上一章定理 4.2 和 4.3 推得. ▮

从定理 4.10 出发, 可以证明如下三个重要结果 (见 [HWY]):

定理 4.12 设 $(\mathcal{F}_t)$ 完备, 则一切右连续适应过程为可选过程.

定理 4.13 设 $(\mathcal{F}_t)$ 完备, X 为一右连左极适应过程. 为要 X 是可料过程, 必须且只需它满足下列条件:

i) 对每个绝不可及时 S, 在 $[S < \infty]$ 上有 $X_S = X_{S-}$ a.s. ,

ii) 对每个可料时 $T, X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathcal{F}_{T-}$- 可测.

定理 4.14 设 $(\mathcal{F}_t)$ 完备, 则一切可料时是可预报的.

下一定理是 Doob 停止定理的可料形式, 它是下一节定义过程的可料投影的基础.

定理 4.15 设 $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件, $(X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+)$ 为一右连左极上鞅 (鞅), 则对一切可料时 T 及停时 $U \geq T$, X_{T-} 可积, 且有

$$\mathbb{E}[X_U \mid \mathcal{F}_{T-}] \leq X_{T-} (= X_{T-}) \text{ a.s.}.$$

证明 令 (T_n) 为预报 T 的停时列. 由定理 1.4 的 10) 有

$$\mathcal{F}_{T-} = \vee_n \mathcal{F}_{T_n} .$$

故由系 2.3 及第一章定理 4.11 即得

$$\mathbb{E}[X_U \mid \mathcal{F}_{T-}] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_U \mid \mathcal{F}_{T_n}] \leq \lim_{n \to \infty} X_{T_n} = X_{T-} \text{ a.s.} .$$

但是易知 $X_{T-}^- \leq \mathbb{E}[X_\infty^- \mid \mathcal{F}_{T_n}]$, 从而由定理 2.1 知 X_{T-} 可积. ▮

系 4.16 设 $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件. 令 ξ 为一可积随机变量, S, T 为两个可料时, 则有

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_{S-}] \mid \mathcal{F}_{T-}] = \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_{(S \wedge T)-}] \text{ a.s.}.$$

证明 令 (X_t) 为鞅 $(\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_t])$ 的右连左极修正，则有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_{S-}] \mid \mathcal{F}_{T-}] &= \mathbb{E}[X_{S-} \mid \mathcal{F}_{T-}] \\
&= \mathbb{E}[I_{[S \geq T]} X_{(S \wedge T)-} + I_{[S<T]} X_{S-} \mid \mathcal{F}_{T-}] \\
&= I_{[S \geq T]} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{S \vee T} \mid \mathcal{F}_{(S \vee T)-}] \mid \mathcal{F}_{T-}] + I_{[S<T]} X_{S-} \\
&= I_{[S \geq T]} \mathbb{E}[X_{S \vee T} \mid \mathcal{F}_{T-}] + I_{[S<T]} X_{S-} \\
&= I_{[S \geq T]} X_{T-} + I_{[S<T]} X_{S-} = X_{(S \wedge T)-} \\
&= \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_{(S \wedge T)-}] \quad \text{a.s.}.
\end{aligned}
$$

∎

系 4.17 设 $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件，则一切可料右连续鞅的几乎所有轨道连续.

证明 设 (X_t) 为一可料右连续鞅. 由定理 4.15 知，对一切有界可料时 T, $X_T = X_{T-}$ a.s.. 故由系 4.4 知， X 与 X_- 无区别. 因此， X 与一连续过程无区别. ∎

§5. 可测过程的投影

在本节及下一节，我们总假定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一完备概率空间，流 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件.

我们将要定义一类可测过程的可选投影及可料投影. 这些投影与概率论中的条件数学期望性质类似. 事实上，我们正是通过条件数学期望来定义过程的投影. 为了方便结果的叙述，我们将采用推广了的条件数学期望概念.

定义 5.1 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间， $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 域. 一随机变量 ξ 称为关于 $\mathcal{G}$ σ-可积, 如果存在 $\Omega_n \in \mathcal{G}, \Omega_n \uparrow \Omega$, 使得每个 ξI_{Ω_n} 为可积.

注 1) 为要随机变量 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ- 可积，必须且只需存在一 $\mathcal{G}$- 可测有限随机变量 $\eta > 0$, 使得 $\xi\eta$ 可积.

2) 设 ξ 为一随机变量. 如果存在 $(G_n) \subset \mathcal{G}$, 使得 $\bigcup_n G_n = \Omega$，且每个 ξI_{G_n} 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ- 可积，则 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ- 可积.

定理 5.2 设 ξ 为一关于 $\mathcal{G}$ 为 σ- 可积的随机变量, 令

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{G}:\ \mathbb{E}[\xi \mid I_A] < +\infty\},$$

则存在 a.s. 唯一的 $\mathcal{G}$- 可测实值随机变量 η, 使得对一切 $A \in \mathcal{C}$ 有

$$\mathbb{E}[\xi I_A] = \mathbb{E}[\eta I_A]. \tag{5.1}$$

我们称 η 为 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的 条件期望, 记为 $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]$.

证明 无妨设 ξ 非负. 取 $\Omega_n \in \mathcal{G}$, $\Omega_n \uparrow \Omega$, 使得 ξI_{Ω_n} 可积. 令 $\eta_n = \mathbb{E}[\xi I_{\Omega_n}|\mathcal{G}]$, 则有 $\eta_{n+1} I_{\Omega_n} = \eta_n$ a.s., $\eta_n \uparrow \eta$ a.s., 其中 η 为一 $\mathcal{G}$- 可测实值随机变量. 令 $A \in \mathcal{C}$, 则有

$$\mathbb{E}[\xi I_A] = \lim_n \mathbb{E}[\xi I_A I_{\Omega_n}] = \lim \mathbb{E}[\eta_n I_A] = \mathbb{E}[\eta I_A],$$

此即 (5.1). 由 (5.1), ηI_{Ω_n} 为 ξI_{Ω_n} 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望, 故 η a.s. 唯一确定. ∎

容易证明, 上述推广的条件期望保留了通常条件期望的性质, 例如线性性、单调收敛定理及如下的两个定理.

定理 5.3 设 ξ 是关于 $\mathcal{G}$ 为 σ- 可积的随机变量, η 为一 $\mathcal{G}$- 可测实值随机变量, 则 $\xi\eta$ 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ- 可积, 且有

$$\mathbb{E}[\xi\eta \mid \mathcal{G}] = \eta \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{G}] \text{ a.s.}. \tag{5.2}$$

定理 5.4 设 $\mathcal{H}$,$\mathcal{G}$ 为两个 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 域, 且 $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. 设 ξ 是一关于 $\mathcal{G}$(从而也关于 $\mathcal{H}$) 为 σ- 可积的随机变量, 则 $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{H}]$ 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ- 可积, 且有

$$\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{H}] \mid \mathcal{G}] \text{ a.s.}.$$

下面定义一类可测过程的可选投影及可料投影.

定理 5.5 设 (X_t) 为可测过程, 使得对一切停时 $T, X_T I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathcal{F}_T$ 为 σ- 可积, 则存在唯一的可选过程, 记为 ${}^oX$, 使得对一切停时 T, 有

$$\mathbb{E}[X_T I_{[T<\infty]} \mid \mathcal{F}_T] = {}^oX_T I_{[T<\infty]} \quad \text{a.s.} \tag{5.3}$$

这时，我们说 X 的可选投影存在，并称 ${}^oX$ 为 X 的 可选投影.

证明 唯一性由系 4.4 得到，往证存在性. 首先，设 $X = \xi I[\![r, s[\![$, 其中 ξ 为一有界 (或可积) 随机变量， $0 \le r < s < +\infty$. 令 ${}^oX = YI_{[\![r,s[\![}$, 其中 $Y = (Y_t)$ 为鞅 $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t]$ 的右连左极修正. 显然, ${}^oX$ 可选. 由第一章定理 4.11 易见 ${}^oX$ 满足 (5.3), 即 ${}^oX$ 为 X 的可选投影. 于是由单调类定理容易推出，一切有界可测过程的可选投影存在. 其次，设 X 为一满足定理条件的非负可测过程. 令 $X^{(n)} = X \wedge n$. 则 $X^{(n)}$ 的可选投影存在， ${}^o(X^{(n)})$ 单调增 (在一不足道集之外). 令

$$Y = \limsup_{n\to\infty} {}^oX^{(n)},\ {}^oX = YI_{[T<\infty]},$$

则 ${}^oX$ 可选，且对一切停时 T, 有

$$\begin{aligned}{}^oX_TI_{[T<\infty]} &= \lim_{n\to\infty} {}^oX_T^{(n)}I_{[T<\infty]}\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_T^{(n)}I_{[T<\infty]} \mid \mathcal{F}_T]\\ &= \mathbb{E}[X_TI_{[T<\infty]} \mid \mathcal{F}_T] \text{ a.s. .}\end{aligned}$$

故 ${}^oX$ 为 X 的可选投影. 最后，设 X 为一满足定理条件的可测过程，令 $X^+ = X \vee 0, X^- = -(X \wedge 0)$, 易见， ${}^oX = {}^o(X^+) - {}^o(X^-)$ 为 X 的可选投影. ∎

注 由定理知，若 X 为循序可测过程，则 X 的可选投影存在，且对一切有穷停时 $T, X_T = {}^oX_T$ a.s.. 特别， ${}^oX$ 为 X 的可选修正.

定理 5.6 设 $X = (X_t)$ 为一可测过程，使得对一切可料时 T, $X_TI_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathcal{F}_{T-}$ 为 σ- 可积，则存在唯一的可料过程，记为 ${}^pX$, 使得对一切可料时 T, 有

$$\mathbb{E}[X_TI_{[T<\infty]} \mid \mathcal{F}_{T-}] = {}^pX_TI_{[T<\infty]} \quad \text{a.s..} \tag{5.4}$$

这时，我们说 X 的可料投影存在，并称 ${}^pX$ 为 X 的 可料投影.

证明 设 $X=\xi I_{[r,s[}$ 其中 ξ 为一有界 (或可积) 随机变量, $0\le r<s<+\infty$. 令 $Y=(Y_t)$ 为鞅 $(\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t])$ 的右连左极修正, 并令 ${}^pX=Y_-$, 这里约定 $Y_{0-}=Y_0$. 则 ${}^pX$ 可料, 且满足 (5.4)(定理 4.15), 即 ${}^pX$ 是 X 的可料投影. 其余证明与定理 5.5 类似. ∎

系 5.7 X 为一右连左极鞅, 则 X_- 为 X 的可料投影. 这里约定 $X_{0-}=X_0$.

下一定理表明, 投影与条件期望在性质上有相似之处 (参见下一节定义 6.3 下面的注).

定理 5.8 设 X 为一可测过程, Y 为一可选 (可料) 过程. 若 X 的可选 (可料) 投影存在, XY 的可选 (可料) 投影存在, 且

$$
{}^o(XY)=({}^oX)Y\quad({}^p(XY)=({}^pX)Y).
$$

证明 由条件期望的性质 (定理 5.3 及 5.4) 推得. ∎

§6. 有限变差过程的对偶投影

首先, 我们定义增过程在 $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上产生的测度.

定义 6.1 设 A 为一可测增过程. 在 $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上定义一集函数 μ_A 如下:

$$
\mu_A(H)=\mathbb{E}\Big[\int_{[0,\infty[}I_H(\cdot,s)dA_s(\cdot)\Big],\ H\in\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\ .
$$

则 μ_A 为一测度, 称为由 A 产生的测度.

令

$$
T_n(\omega)=\inf\{t\ge 0:\ A_t(\omega)\ge n\}\ .
$$

则 T_n 为随机变量, $[\![0,T[\![\in\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, $\bigcup_n[\![0,T_n[\![=\Omega\times\mathbb{R}_+$, 且 $\mu_A([\![0,T[\![)\le n$, 于是 μ_A 为 $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上的 σ- 有限测度. 易见, μ_A 在不足道集上无负荷, 且对一切 $t\ge 0,F\in\mathcal{F}$, 有

$$
\mu_A(F\times[0,t])=\mathbb{E}[I_FA_t].
$$

定理 6.2 为使 $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上一测度 μ 是由某一增过程产生，必须且只需对每个 $t\geq 0$, 如下定义的 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的集函数 G_t:

$$G_t(F)=\mu(F\times[0,t]),\ F\in\mathcal{F}\ ,$$

为关于 $\mathbb{P}$ 绝对连续的 σ- 有限测度. 这时，产生 μ 的增过程是唯一确定的.

证明 必要性显然，往证充分性. 记 A_t' 为 Radon-Nikodym 导数 $\frac{dG_t}{d\mathbb{P}}$, 令

$$A_t=\inf\{A_r':r>t,r\in Q_+\},\ t\geq 0.$$

其中 Q_+ 为非负有理数全体. 则对一切 $t\geq 0$, 有 $A_{t+}=A_t$, 且 $A_t=A_t'$ a.s.. 易证 μ 是由 A 产生的. 唯一性显然. ∎

定义 6.3 设 μ 为 $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上的一测度，且在不足道集上无负荷. 称 μ 为 可选的 (可料的), 若对一切非负有界可测过程 X, 有

$$\mu(X)=\mu^o(X)\ (\mu(X)=\mu(^pX))\ ,$$

其中 $\mu(X)=\int_{\Omega\times\mathbb{R}_+}Xd\mu$.

注 设 X 为有界可测过程. 由定理 5.4 易知，对一切有界可选 (可料) 概率测度 μ, 有 $^oX=\mu[X|\mathcal{O}](^pX=\mu[X|\mathcal{P}])$.

下面我们定义测度的投影，这是研究增过程的对偶投影的基础.

定义 6.4 设 μ 为 $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上的一 σ- 有限测度，且在不足道集上无负荷. 对任一非负有界可测过程 X, 令

$$\mu^o(X)=\mu(^oX)\ ,\quad \mu^p(X)=\mu(^pX)\ .$$

则 μ^o 及 μ^p 别为 $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上的可选及可料测度，且在不足道集上无负荷 (但不一定 σ- 有限). 我们分别称 μ^o 及 μ^p 为 μ 的 可选投影 及 可料投影.

显然，μ 与 μ^p 限于可选 σ- 域 $\mathcal{O}$ 一致，μ 与 μ^p 限于可料 σ- 域 $\mathcal{P}$ 一致. 此外，为了 μ 为 $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上的可选 (可料) 测度，必须且只需 $\mu=\mu^o(\mu=\mu^p)$.

定义 6.5 设 A 为一增过程. 称 A 为可积增过程, 如果 $A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n$ 为一可积随机变量. 称 A 为局部可积增过程, 如果 A_0 关于 $\mathcal{F}_0$ 为 σ- 可积, 且存在停时 $T_n \uparrow \infty$ a.s, 使得 $A_{T_n} - A_0$ 为可积. 称 A 为准局部可积增过程, 如果存在停时 $T_n \uparrow \infty$ a.s., 使得每个 $A_{T_n} - I_{[T_n>0]}$ 为可积.

显然, 局部可积增过程为准局部可积的. 事实上, 只需考虑 $A_t \equiv A_0, t \geq 0$ 这一情形, 其中 A_0 关于 $\mathcal{F}_0$ 为 σ- 可积. 令 $E_n \in \mathcal{F}_0$ 使得 $E_n \uparrow \Omega$, 且每个 $A_0 I_{E_n}$ 为可积. 置 $T_n = (+\infty) I_{E_n}$ 则 $T_n \uparrow \infty, A_{T_n} - I_{[T_n>0]} = A_0 I_{E_n}$, 故 A 为准局部可积.

设 A 为一有限变差过程, 令 $V_t = \int_{[0,t]} |dA_s|$. 若 $V = (V_t)$ 为可积增过程, 称 A 为可积变差过程, 若 V 为 (准) 局部可积增过程, 称 A 为 (准) 局部可积变差过程. 显然, 为要一有限变差过程 A 为可积变差过程, 必须且只需 A 为两个可积增过程之差. 对 (准) 局部可积变差过程也有类似的结论.

定理 6.6 设 A 为一适应有限变差过程, 则 A 为一准局部可积变差过程. 设 A 为一可料有限变差过程, 则存在停时 $S_n \uparrow \infty$ a.s, 使得 $\int_0^{S_n} |dA_s| \leq n$. 特别, A 为一局部可积变差过程.

证明 只需对 A 为增过程情形证明. 设 A 为适应增过程. 令

$$T_n = \inf\{t \geq 0:\ A_t \geq n\}, \qquad n \geq 1,$$

则 T_n 为停时, $T_n \uparrow +\infty$, 且 $A_{T_n} - I_{[T_n>0]} \leq n$, 故 A 为准局部可积. 如果 A 为可料增过程, 则 T_n 为可料时. 无妨设 $A_0 = 0$, 这时 $T_n > 0$. 对每个 n, 令 $(S_{n,k})_{k\geq 1}$, 为预报 T_n 的停时列, 并令 $S_n = \vee_{i=1}^n S_{i,n}$, 则 $S_n < T_n, S_n \uparrow \infty$, 且 $A_{S_n} \leq n$. ∎

定理 6.7 设 A 为一增过程, μ_A 为由 A 产生的 $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上的测度, 则为要 μ_A 是可选的 (可料的), 必须且只需 A 是适应的 (可料的).

定理 6.8 设 μ 为一增过程 A 在 $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上产生的测度, μ^o 及 μ^p 分别为 μ 的可选及可料投影.

1) 为要 μ^o 由一 (适应) 增过程产生, 必须且只需 A 为准局部可积.

2) 为要 μ^p 由一 (可料) 增过程产生, 必须且只需 A 为局部可积.

上面两个定理的证明见 [HWY]. 定理 6.8 导致如下的定义.

定义 6.9 1) 设 A 为一准局部可积增过程, 我们用 A^o 表示产生测度 ν_A^o 的适应增过程, 并称 A^o 为 A 的 可选对偶投影.

2) 设 A 为一局部可积增过程, 我们用 A^p 表示产生测度 ν_A^p 的可料增过程, 并称 A^p 为 A 的 可料对偶投影.

以上定义可自然推广到 (准) 局部可积变差过程情形.

定理 6.10 1) 设 A 为一准局部可积变差过程, 则对任一可选过程 H, 有

$$\mathbb{E}\Big[\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s^o|\Big]\leq\mathbb{E}\Big[\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s|\Big]. \tag{6.1}$$

2) 设 A 为一局部可积变差过程, 则对任一可料过程 H, 有

$$\mathbb{E}\Big[\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s^p|\Big]\leq\mathbb{E}\Big[\int_{[0,\infty[}|H_s||dA_s|\Big]. \tag{6.2}$$

证明 只证 1), 2) 的证明类似. 令 A^+ 及 A^- 分别表示 A 的正、负变差过程, 则 $A=A^+-A^-$, A^+ 及 A^- 为准局部可积增过程. 令 $\|A\|$ 及 $\|A^o\|$ 分别表示 A 及 A^o 的变差过程, 则由于 $A^o=(A^+)^o-(A^-)^o$, 我们有 $\|A^o\|\leq(A^+)^o+(A^-)^o$, 从而

$$\mu_{\|A^o\|}\leq\mu_{(A^+)^o}+\mu_{(A^-)^o}=(\mu_{\|A\|})^o.$$

由此推得 1). ∎

定理 6.11 1) 设 A 为一准局部可积变差过程, H 为一可选过程, 使得 $H.A$ 为一准局部可积变差过程, 则 $H.A^o$ 为一适应有限变差过程, 且有 $(H.A)^o=H.A^o$.

2) 设 A 为一局部可积变差过程，H 为一可料过程，使得 $H.A$ 为一局部可积变差过程，则 $H.A^p$ 为一可料有限变差过程，且有 $(H.A)^p = H.A^p$.

证明 我们只证 1). 不妨设 A 为增过程，且 H 非负. 令停时 $T_n \uparrow +\infty$, 使得 $(H.A)_{T_n}-I_{[T_n>0]}$ 为可积. 则由 (6.1) 知，H 关于 A^o 可积. 由定理 3.5, $H.A^o$ 为适应的. 对一切非负有界可测过程 X, 我们有

$$\mu_{(H.A)^o}(X) = \mu^o_{H.A}(X) = \mu_{H.A}({}^oX) = \mu({}^o(HX))$$
$$= \mu^o_A(HX) = \mu_{A^o}(HX) = \mu_{H.A^o}(X),$$

这表明 $(H.A)^o = H.A^o$. ∎

系 6.12 1) 设 A 为一 (准) 局部可积变差过程，则对任一停时 T, 我们有 $((A^T)^o = (A^o)^T)(A^T)^p = (A^p)^T$.

2) 设 A 为一局部可积变差过程，则对任一可料时 T, 我们有 $(A^{T-})^p = (A^p)^{T-}$, 这里 $A^{T-} = AI_{[0,T[} + A_{T-}I_{[T,\infty[}$.

证明 在定理 6.11 中分别令 $H = I_{[0,T]}$ 和 $H = I_{[0,T[}$ 即得 1) 和 2). ∎

下一定理的证明与定理 6.11 的证明类似.

定理 6.13 1) 设 A 为一适应有限变差过程，H 为一存在可选投影的可测过程，使得 $H.A$ 为准局部可积变差过程，则 ${}^oH$ 关于 A 可积，且 $(H.A)^o = ({}^oH).A$.

2) 设 A 为一可料有限变差过程，H 为一有可料投影的可测过程，使得 $H.A$ 为局部可积变差过程，则 ${}^pH$ 关于 A 可积，且 $(H.A)^p = ({}^pH).A$.

下一定理给出了对偶投影过程的跳的一个表达式.

定理 6.14 1) 设 A 为一准局部可积变差过程，则 ΔA 的可选投影存在，且有 ${}^o(\Delta A) = \Delta A^o$.

2) 设 A 为一局部可积变差过程，则 ΔA 的可料投影存在，且有 ${}^p(\Delta A) = \Delta A^p$.

证明 只证 2). 不妨设 A 为局部可积增过程. 显然 A 的可料投影存在. 由于 $A_- \le A$, 故 A_- 亦然，从而 ΔA 的可料投影存

在. 于是, 对一切可料时 T, $\Delta A_T I_{[T<\infty]}$ 关于 $\mathcal{F}_{T-}$σ- 可积, 并且对一切 $F\in\mathcal{F}_{T-}$ 有 (注意 T_F 为可料时)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta A^p_T I_{[T<\infty]} I_F] &= \mu_{A^p}([\![T_F]\!]) = \mu_A([\![T_F]\!]) \\ &= \mathbb{E}[\Delta A_T I_{[T<\infty]} I_F].\end{aligned}$$

这表明

$$\mathbb{E}[\Delta A_T I_{[T<\infty]} \mid \mathcal{F}_{T-}] = \Delta A^p_T I_{[T<\infty]},$$

从而 ${}^p(\Delta A) = \Delta A^p$. ∎

下一引理虽然简单, 但有时很有用.

引理 6.15 设 $X=(X_t)$ 为一适应可测过程, X_∞ 为一可积随机变量, $X_\infty\in\mathcal{F}_\infty$. 若对每个停时 T, X_T 可积, 且 $\mathbb{E}[X_T]$ 不依赖于 T, 则 X 为一致可积鞅.

证明 对任一停时 T 及 $A\in\mathcal{F}_T$, 有

$$\begin{aligned}\int_A X_T d\mathbb{P} &= \mathbb{E}[X_T] - \int_{A^c} X_\infty d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}[X_\infty] - \int_{A^c} X_\infty d\mathbb{P} = \int_A X_\infty d\mathbb{P}. \qquad (6.3)\end{aligned}$$

在 (6.3) 中取 $T=t\in\mathbb{R}_+$, 由于 $X_t\in\mathcal{F}_t$, 故得

$$\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_t] = X_t \quad \text{a.s.}.$$

因此, X 为一致可积鞅. ∎

下一定理给出了可料对偶投影的一个刻画.

定理 6.16 时 A 为一适应可积变差过程, B 为一可料可积变差过程, 为要 B 是 A 的可料对偶投影, 必须且只需 $A-B$ 为一零初值一致可积鞅.

证明 必要性. 设 T 为一停时, 则由于 $]\!]T,\infty[\![$ 为可料集, 我们有

$$\mathbb{E}[A_\infty - A_T] = \mu_A(]\!]T,\infty[\![) = \mu_{A^p}(]\!]T,\infty[\![) = \mathbb{E}[A^p_\infty - A^p_T],$$

于是对一切停时 $T,\mathbb{E}[A_T-A_T^p]=\mathbb{E}[A_\infty-A_\infty^p]$. 故由引理 6.15 知 $A-A^p$ 为零初值一致可积鞅.

充分性. 设 $A-B$ 为零初值一致可积鞅. 则对一切停时 T,

$$\mu_{A-B}(]\!]T,\infty[\![)=\mathbb{E}[(A_\infty-B_\infty)(A_T-B_T)]=0.$$

因此有 $\mu_B(]\!]T,\infty[\![)=\mu_{A^p}(]\!]T,\infty[\![)$. 另一方面, 由于 $B_0=A_0=A_0^p$, 故对一切 $F\in\mathcal{F}_0,\mu_B(F\times\{0\})=\mu_{A^p}(F\times\{0\})$. 令

$$\mathcal{G}=\{C\in\mathcal{P}:\mu_B(C)=\mu_{A^p}(C)\},$$
$$\mathcal{C}=\{F\times\{0\}:F\in\mathcal{F}_0\}\cup\{]\!]T,\infty[\![:T\text{为停时}\},$$

则 $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{P}$ 的 π- 类, $\mathcal{G}$ 为 λ- 类, 故由单调类定理知 $\mathcal{G}=\mathcal{P}$. 从而 μ_B 与 μ_{A^p} 在 $\mathcal{P}$ 上一致. 但 μ_B 与 μ_{A^p} 都是可料符号测度, 故 $B=A^p$. ∎

第三章 现代鞅论

从本章起，我们令 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为一完备概率空间， $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)$ 为一满足通常条件的 σ- 域流. 今后，我们使用下列记号:

$\mathcal{A}(\mathcal{A}^+)$—— 适应可积变差 (增) 过程全体,

$\mathcal{V}(\mathcal{V}^+)$—— 适应有限变差 (增) 过程全体,

$\mathcal{M}$—— 一致可积右连左极鞅全体.

对任一过程类 $\mathcal{D}$, 以 $\mathcal{D}_0$ 记 $\mathcal{D}$ 中初值为零的过程全体. 对任一适应局部可积变差过程 A, 它的可料对偶投影，记为 $\widetilde{A}$.

§ 1. 类 (D) 上鞅的 Doob-Meyer 分解

定义 1.1 令 $\mathcal{T}$ 为停时全体. 一可测过程 X 称为 类 (D) 过程, 如果 $\{X_T I_{[T<\infty]}: T\in\mathcal{T}\}$ 为一致可积随机变量族.

由 Doob 停止定理不难看出，一切一致可积右连左极鞅或非负右闭右连左极下鞅是类 (D) 过程.

一非负上鞅 (Z_t) 称为 位势, 如果 $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[Z_t]=0$.

定理 1.2 设 $A=(A_t)$ 为一零初值可料可积增过程， $Z=(Z_t)$ 为 $(A_\infty-A_t)$ 的可选投影，则 Z 为类 (D) 位势， A 由 Z 唯一确定. Z 称为 由 A 产生的位势.

证明 由于 $(\mathbb{E}[A_\infty|\mathcal{F}_t])$ 的右连左极修正是过程 $\xi_t=A_\infty$ 的可选投影，故 Z 右连左极，且 $Z_t=\mathbb{E}[A_\infty|\mathcal{F}_t]-A_t$ a.s.. 对 $s<t$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_t\mid\mathcal{F}_s]&=\mathbb{E}[A_\infty\mid\mathcal{F}_s]-\mathbb{E}[A_t\mid\mathcal{F}_s]\\&\le\mathbb{E}[A_\infty\mid\mathcal{F}_s]-A_s=Z_s\ \text{a.s.}\,,\end{aligned}$$

即 Z 为非负上鞅. 另一方面,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[Z_t]=\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[A_\infty-A_t]=0\,,$$

故 Z 为一位势. 最后, $Z_t \le \mathbb{E}[A_\infty|\mathcal{F}_t]$ a.s., 故 Z 为 (D) 类过程. 设 μ_A 为由 A 产生的测度, 则 μ_A 为有限测度, $\mu_A([\![0]\!]) = 0$, 且对任何停时 S, 有

$$\mu_A(]\!]S,\infty[\![) = \mathbb{E}[A_\infty - A_S] = \mathbb{E}[Z_S]. \tag{1.1}$$

故 μ_A 限于可料 σ- 域上由 Z 唯一确定. 由于 A 可料, 所以 A 也由 Z 唯一确定. ∎

自然会提出这样一个问题: 是否任一类 (D) 位势都由一可料可积增过程产生? 下面我们将证明回答是肯定的, 其中 (1.1) 是解决这一问题的关键.

令 $\mathcal{C}$ 为 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上由

$$\{[\![0_F]\!] : F \in \mathcal{F}_0\} \cup \{]\!]S,T]\!] : S \le T \text{为停时}\}$$

生成的域, 则 $\mathcal{C}$ 生成可料 σ- 域 $\mathcal{P}$, 且 $\mathcal{C}$ 中的每个元素 H 可唯一地表示为如下形式:

$$H = [\![O_F]\!] \cup]\!]S_1, T_1]\!] \cup \cdots \cup]\!]S_n, T_n]\!], \tag{1.2}$$

其中 $n \ge 1$, $F \in \mathcal{F}_0, S_i, T_i$, 为停时, 在 $[S_i < \infty]$ 上 $S_i < T_i$, 在 $[T_i < \infty]$ 上, $T_i < S_{i+1}$. 我们称 H 的这种表示为 典则表示, 并令

$$\overline{H} = [\![O_F]\!] \cup [\![S_1, T_1]\!] \cup \cdots \cup [\![S_n, T_n]\!].$$

引理 1.3 设 (Z_t) 为一类 (D) 位势, $Z_\infty = 0$. 设 $H \in \mathcal{C}$, 若其典则表示如 (1.2), 令

$$\mu(H) = \mathbb{E}[Z_{S_1} - Z_{T_1}] + \cdots + \mathbb{E}[Z_{S_n} - Z_{T_n}], \tag{1.3}$$

则 μ 为 $\mathcal{C}$ 上的有限测度.

证明 首先, 我们证明如下事实: 对任给 $\epsilon > 0$ 及 $H \in \mathcal{C}$, 存在 $K \in \mathcal{C}$, 使得 $\overline{K} \subset H, K \cap [\![0]\!] = \emptyset$, 且 $\mu(H) \le \mu(K) + \epsilon$. 为此, 不妨假定 H 为形如 $]\!]S,T]\!]$ 的随机区间, $S \le T$, 且在 $[S < \infty]$

上， $S<T$. 记 $A_n=[S+\frac{1}{n}<T]$, 令 S_n 为 $S+\frac{1}{n}$ 到 A_n 上的局限， T_n 为 T 到 A_n 上的局限. 则我们有 $S_n\geq S, S=\lim_n S_n$, 且在 $[S<\infty]$ 上， $S_n>S$. 同时， $T_n\geq T, T=\lim_n T_n$, 在 $[S_n<\infty]$ 上， $T=T_n$. 于是，对每个 $n, [\![S_n,T_n]\!]\subset]\!]S,T]\!]$. 由于 Z 为右连续类 (D) 过程，取 n 充分大，可使 $\mathbb{E}[Z_{S_n}-Z_{T_n}]\geq \mathbb{E}[Z_S-Z_T]-\epsilon$. 令 $K=]\!]S_n,T_n]\!]$, 则 K 满足要求.

μ 的有限性及可加性是显然的，为证 μ 的可列可加性，只需证： $H\in\mathcal{C}, H_n\downarrow\emptyset\Rightarrow\mu(H_n)\downarrow 0$. 对任给 $\epsilon>0$, 取 $K_n\in\mathcal{C}$, 使得 $K_n\cap[\![0]\!]=\emptyset, \overline{K}_n\subset H_n$ 及 $\mu(H_n)\leq\mu(K_n)+\epsilon 2^{-n}$. 令 $L_n=K_1\cap\cdots\cap K_n$, 则对一切 n, $L_n\in\mathcal{C}, \overline{L}_n\subset H$, 且

$$\mu(H_n)\leq\mu(L_n)+\epsilon. \tag{1.4}$$

另一方面， $\overline{L}_n\downarrow\emptyset$. 令

$$D_n(\omega)=\inf\{t:(\omega,t)\in\overline{L}_n\},$$

则 $[\![D_n]\!]\subset\overline{L}_n, D_n\uparrow+\infty$, 且由第二章定理 4.9 知， D_n 为停时. 由于 $L_n\subset]\!]D_n\infty[\![$, 有

$$\mu(L_n)\leq\mu(]\!]D_n,\infty[\![)=\mathbb{E}[Z_{D_n}-Z_\infty]=\mathbb{E}[Z_{D_n}].$$

注意到 $\mathbb{E}[Z_{D_n}]\longrightarrow 0$(因 Z 为类 (D) 位势), 我们有 $\lim_n\mu(L_n)=0$. 由 (1.4) 得 $\lim_n\mu(H_n)\leq\epsilon$. 令 $\epsilon\downarrow 0$ 得 $\lim_n\mu(H_n)=0$. ∎

定理 1.4 设 Z 为一类 (D) 位势，则存在唯一的可料可积增过程 A, 使得 Z 由 A 产生.

证明 唯一性已包含在定理 1.2 之中，只需证存在性. 将按 (1.3) 定义的 $\mathcal{C}$ 上的有限测度 μ 唯一地扩张到可料 σ- 域 $\mathcal{P}$ 上，仍用 μ 表示之. 显然， μ 在不足道集上无负荷. 对 $H\in\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, 令

$$\bar{\mu}(H)=\mu({}^pI_H), \tag{1.5}$$

则 $\bar{\mu}$ 为 $\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上的可料有限测度，且在不足道集上无负荷. 由第二章定理 6.2 及 6.7, 存在唯一的可料可积增过程 A, 使得 $\bar{\mu}$

由 A 产生. 由于 $\mathbb{E}[A_0] = \bar{\mu}([\![0]\!] = \mu([0]\!]) = 0$, 故 $A_0 = 0$ a.s.. 此外, 由 (1.3), 对任何停时 S, 有

$$\mathbb{E}[A_\infty - A_S] = \mu(]\!]S, \infty[\![) = \mathbb{E}[Z_S].$$

这表明 Z 是 $(A_\infty - A_t)$ 的可选投影, 即由 A 产生的位势. ∎

作为这一定理的一个重要推论, 我们得到下述类 (D) 上鞅的 Doob-Meyer 分解定理.

定理 1.5 设 X 为一右连续类 (D) 上鞅, 则 X 可唯一地分解为

$$X = M - A, \tag{1.6}$$

其中 M 为一致可积鞅, A 为零初值可料可积增过程. (1.6) 称为 X 的 Doob-Meyer 分解.

证明 存在性. 令

$$Z_t = X_t - \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_t],$$

则 $Z = (Z_t)$ 为类 (D) 位势. 由定理 1.4, 存在可料可积增过程 A, 使得

$$Z_t = \mathbb{E}[A_\infty \mid \mathcal{F}_t] - A_t .$$

令 $M_t = \mathbb{E}[X_\infty + A_\infty \mid \mathcal{F}_t]$, 则 $X = M - A$ 为 X 的 Doob-Meyer 分解.

唯一性. 设 $X = \overline{M} - \overline{A}$ 为 X 的另一 Doob-Meyer 分解, 则 $A - \overline{A} = \overline{M} - M$ 既是一致可积鞅, 又是零初值可料可积变差过程, 故由第二章定理 6.16 知 $A - \overline{A} = 0$, 从而 $A = \overline{A}, M = \overline{M}$. ∎

§2. 可积变差鞅

定义 2.1 $X = (X_t)$ 称为可积变差鞅, 如果它既是鞅, 又是可积变差过程.

显然, 可积变差鞅是一致可积鞅, 以 $\mathcal{W}$ 记可积变差鞅全体, 则 $\mathcal{W} = \mathcal{M} \cap \mathcal{A}$. 由第二章定理 6.16 知, 对任一 $A \in \mathcal{A}$, $A - \widetilde{A} \in \mathcal{W}_0$.

定理 2.2 设 M 为一可料可积变差鞅，则 $M_t \equiv M_0$.

证明 由第二章定理 6.16 知， $M = \widetilde{M}$, $\widetilde{M}_t \equiv M_0$. ∎

下一定理是有关可积变差鞅的最主要的结果.

定理 2.3 设 M 为一可积变差鞅，则对任一有界鞅 N, 有

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}\left[M_0 N_0] + \mathbb{E}[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta N_s\right]. \tag{2.1}$$

此外， $(L_t) = (M_t N_t - \sum_{s\le t} \Delta M_s \Delta N_s)$ 为一致可积鞅.

证明 由于 N 是 N_∞ 的可选投影，故

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} N_\infty dM_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} N_s dM_s\right].$$

另一方面， $\widetilde{M}_t \equiv M_0$, 所以

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} N_{s-} dM_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} N_{s-} d\widetilde{M}_s\right] = \mathbb{E}[M_0 N_0].$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_\infty N_\infty] - \mathbb{E}[M_0 N_0] &= \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} \Delta N_s dM_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{s>0} \Delta M_s \Delta N_s\right].\end{aligned}$$

设 T 为一停时，对 N^T 应用 (2.1) 得

$$\mathbb{E}[M_T N_T] = \mathbb{E}[M_\infty N_T] = \mathbb{E}[M_0 N_0] + \mathbb{E}\left[\sum_{0<s\le T} \Delta M_s \Delta N_s\right].$$

即 $\mathbb{E}[L_T] = \mathbb{E}[L_0]$. 由第二章引理 6.15 知 $L \in \mathcal{M}$. ∎

下一定理说明可料过程在随机积分中的特殊地位.

定理 2.4 设 M 为一可积变差鞅, H 为一可料过程, 使得

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} | H_s || dM_s |\right] < \infty,$$

则 $H.M$ 为可积变差鞅.

证明 由第二章定理 6.11 有

$$(\widetilde{H.M}) = H.\widetilde{M} = H_0 M_0.$$

因此, $H.M - \widetilde{H.M} = H.M - H_0 M_0 \in \mathcal{W}_0, H.M \in \mathcal{W}$. ∎

§ 3. 平方可积鞅

定义 3.1 设 M 为一鞅, 称 M 为平方可积鞅, 若 $\sup_n \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$. 以 $\mathcal{M}^2$ 记平方可积鞅全体.

下一定理的证明是容易的, 故从略.

定理 3.2 1) 设 $M \in \mathcal{M}$, 则 $M \in \mathcal{M}^2$ 当且仅当 $\mathbb{E}[M_\infty^2] < \infty$. 这时我们有

$$\mathbb{E}[M_\infty^2] = \sup_t \mathbb{E}[M_t^2].$$

2) $\mathcal{M}^2$ 按内积 $(M,N) = \mathbb{E}[M_\infty N_\infty]$ 构成一 Hilbert 空间, 且与 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 同构, $M \longmapsto M_\infty$ 为其同构映射.

定理 3.3 1) 设 $(M^n)_{n\geq 1}$ 在 $\mathcal{M}^2$ 中收敛于 M, 则存在一子列 $(M^{n_k})_{k\geq 1}$, 使得 M^{n_k} 的几乎所有轨道在 $\mathbb{R}_+$ 上一致收敛于 M 的轨道.

2) 以 $\mathcal{M}^{2,c}$ 记连续平方可积鞅全体, 则 $\mathcal{M}^{2,c}$ 为 $\mathcal{M}^2$ 的闭子空间.

证明 1) 取子列 $(M^{n_k})_{k\geq 1}$ 使得 $\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{E}(M_\infty^{n_k} - M_\infty)^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$, 则由 Doob 不等式即知, $\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_t |M_t^{n_k} - M_t|\right] < \infty$. 故 1) 得证. 2) 是 1) 的直接推论. ∎

定义 3.4 令 $\mathcal{M}^{2,d}$ 记 $\mathcal{M}^{2,c}$ 在 $\mathcal{M}^2$ 中的直交补. $\mathcal{M}^{2,d}$ 中的元素称为 **纯断平方可积鞅**.

设 $M \in \mathcal{M}^{2,d}$, 则显然有 $M_0 = 0$, a.s.. 设 $M \in \mathcal{M}^2$, 则 M 有如下唯一分解

$$M = M_0 + M^c + M^d ,$$

其中 $M^c \in \mathcal{M}_0^{2,c}, M^d \in \mathcal{M}^{2,d}$. M^c 称为 M 的 **连续鞅部分**, M^d 称为 M 的 **纯断鞅部分**.

设 $M \in \mathcal{M}^2, T$ 为一停时, 易见

$$(M^T)^c = (M^c)^T, \quad (M^T)^d = (M^d)^T .$$

引理 3.5 设 $A \in \mathcal{A}^+$, 则

$$\mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty^2] \le 4\mathbb{E}[A_\infty^2]. \tag{3.1}$$

证明 令 $N = (N_t)$ 为鞅 $(\mathbb{E}[A_\infty|\mathcal{F}_t])$ 的右连左极修正, $N_\infty^* = \sup_t |N_t|$. 由 Doob 不等式,

$$\mathbb{E}[(N_\infty^*)^2] \le 4\mathbb{E}[N_\infty^2] = 4\mathbb{E}[A_\infty^2]. \tag{3.2}$$

由于 $A - \widetilde{A} \in \mathcal{M}$, 故有

$$A_s - \widetilde{A}_s = \mathbb{E}[A_\infty - \widetilde{A}_\infty \mid \mathcal{F}_s] = N_s - \mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty \mid \mathcal{F}_s].$$

由第二章定理 6.7 得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty^2] &= \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} \widetilde{A}_\infty d\widetilde{A}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} \mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty \mid \mathcal{F}_{s-}]d\widetilde{A}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} (\widetilde{A}_{s-} - A_{s-} + N_{s-})dA_s\right] \\
&\le \mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty A_\infty + N_\infty^* A_\infty].
\end{aligned}$$

但是

$$\mathbb{E}[\widetilde{A}_\infty A_\infty] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} A_\infty d\widetilde{A}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,\infty[} N_{s-} dA_s\right]$$
$$\leq \mathbb{E}[N^*_\infty A_\infty],$$

故有 $\mathbb{E}[\widetilde{A}^2_\infty] \leq 2\mathbb{E}[N^*_\infty A_\infty]$. 从而由 Schwarz 不等式及 (3.2) 推得 (3.1). ∎

引理 3.6 设 $M \in \mathcal{M}^2$, 则对任一停时 T, 有

$$\mathbb{E}[(\Delta M_T)^2] \leq 16\mathbb{E}[M^2_\infty].$$

证明 令 $M^*_\infty = \sup_t |M_t|$. 由 Doob 不等式有

$$\mathbb{E}[(M^*_\infty)^2] \leq 4\mathbb{E}[M^2_\infty] < \infty.$$

由于 $|\Delta M_T| \leq 2M^*_\infty$, 故 $\mathbb{E}[(\Delta M_T)^2] \leq 16\mathbb{E}[M^2_\infty]$. ∎

现在我们研究纯断平方可积鞅的结构. 设 T 为一停时且 $T > 0$. 令

$$\mathcal{M}^2[T] = \{M \in \mathcal{M}^{2,d} : [\Delta M \neq 0] \subset [\![T]\!]\}.$$

定理 3.7 设 $T > 0$ 为一绝不可及时或可料时.

1) $M \in \mathcal{M}^2[T] \Leftrightarrow M = A - \widetilde{A}$, 其中 $A = \xi I_{[\![T,\infty[\![}, \xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$.

2) 设 $M \in \mathcal{M}^2[T]$, 则对任一 $N \in \mathcal{M}^2$, 有

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[\Delta M_T \Delta N_T]. \tag{3.3}$$

证明 1) 充分性. 设 $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$, $A = \xi I_{[\![T,\infty[\![}$. 令 $M = A - \widetilde{A}$. 由引理 3.6,$M \in \mathcal{M}^2$. 若 T 为绝不可及时, 则 $\widetilde{A}$ 连续. 若 T 为可料时, 则 $\widetilde{A} = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_{T-}]I_{[\![T,\infty[\![}$. 在两种情形下都有 $[\Delta M \neq 0] \subset [\![T]\!]$. 往证 $M \in \mathcal{M}^{2,d}$. 令 $N \in \mathcal{M}^{2,c}$, 置

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |N_t| \geq n\}.$$

则 T_n 为停时, $T_n \uparrow +\infty$, 每个 N^{T_n} 为有界连续鞅. 由定理 2.3 得

$$\mathbb{E}[M_\infty N_{T_n}] = \mathbb{E}[M_\infty N^{T_n}_\infty] = 0.$$

但易知 N_{T_n} L^2 收敛于 N_∞, 从而 $\mathbb{E}[M_\infty N_\infty]=0$. 这表明 $M\in\mathcal{M}^{2,d}$. 因此 $M\in\mathcal{M}^2[T]$.

必要性. 设 $M\in\mathcal{M}^2[T]$. 令 $A=\Delta M_T I_{[\![T,\infty[\![}$. 如上所证, $A-\widetilde{A}\in\mathcal{M}^2[T]$, 故 $M-(A-\widetilde{A})\in\mathcal{M}^2[T]$. 另一方面, 若 T 为绝不可及时, $\widetilde{A}$ 连续, $\Delta(A-\widetilde{A})_T=\Delta A_T=\Delta M_T$. 若 T 为可料时, 则易知 $\widetilde{A}=\mathbb{E}[\Delta M_T|\mathcal{F}_{T-}]I_{[\![T,\infty[\![}=0$, $\Delta(A-\widetilde{A})_T=\Delta M_T$. 这表明 $M-(A-\widetilde{A})\in\mathcal{M}^{2,c}$. 故 $M-(A-\widetilde{A})=0$, 即 $M=A-\widetilde{A}$.

2) 设 $N^{(n)}$ 为有界鞅 $(\mathbb{E}[N_\infty I_{[|N_\infty|\le n]}|\mathcal{F}_t])$ 的右连左极修正. 由定理 2.3 有

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty^{(n)}]=\mathbb{E}[\Delta M_T\Delta N_T^{(n)}]. \tag{3.4}$$

由于 $n\to\infty$ 时, $N_\infty^{(n)}=N_\infty I_{[|N_\infty|\le n]}$ L^2 收敛于 N_∞, 由引理 3.6 知, $\Delta N_\infty^{(n)}$ L^2 收敛于 ΔN_T. 在 (3.4) 中令 $n\to\infty$ 得 (3.3). ∎

定理 3.8 设 $M\in\mathcal{M}^2$, 则

$$\mathbb{E}[M_0^2]+\mathbb{E}[\sum_s(\Delta M_s)^2]\le\mathbb{E}[M_\infty^2]. \tag{3.5}$$

(3.5) 中等号成立, 当且仅当 $M-M_0\in\mathcal{M}^{2,d}$.

证明 设 $(T_n)_{n\ge1}$ 为穷举 M 跳的标准停时列 (见第二章定理 4.8). 令

$$A_n=\Delta M_{T_n}I_{[\![T,\infty[\![},\ M^n=A^n-\widetilde{A}^n,\ H^k=\sum_{n=1}^k M^n.$$

则正交级数 $\sum_{n=1}^\infty M^n$ 收敛于 $\mathcal{M}^2$ 中一元素 H, 且 $H\in\mathcal{M}^{2,d}$. 此外, 由定理 3.3.3) 知, H 与 M 有相同的跳. 因此, $M-H$ 为连续平方可积鞅, 且 $M^d=H, M^c=M-M_0-H$. 由 (3.3) 得 $\mathbb{E}[(M_\infty^n)^2]=\mathbb{E}[(\Delta M_{T_n})^2]$, 故有定理结论. ∎

定理 3.9 1) 设 $M,N\in\mathcal{M}^2$, 则

$$\mathbb{E}[M_0N_0]+\mathbb{E}[\sum_s|\Delta M_s\Delta N_s|]\le\sqrt{\mathbb{E}[M_\infty^2]}\sqrt{\mathbb{E}[N_\infty^2]}.$$

2) 设 $M \in \mathcal{M}^{2,d}$, 则对一切 $N \in \mathcal{M}^2$ 有

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s] \tag{3.6}$$

此外, $(L_t) = (M_t N_t - \sum_{s \leq t} \Delta M_s \Delta N_s)$ 为一致可积鞅.

3) $\mathcal{M}_0^2 \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{M}^{2,d}$.

证明 1) 由 Schwarz 不等式及 (3.5) 推得.

2) 由定理 3.8 知, (3.6) 对 $N \in \mathcal{M}^{2,d}$ 成立. 现设 $N \in \mathcal{M}^2$, N^d 为 N 的纯断鞅部分, 则 $N - N^d \in \mathcal{M}^{2,d}, M \perp N - N^d$, $\mathbb{E}[M_\infty(N_\infty - N_\infty^d)] = 0$, 故有

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[M_\infty N_\infty^d] = \mathbb{E}[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s].$$

设 T 为一停时, 对 M^T 及 N^T 应用 (3.6) 得 $\mathbb{E}[L_T] = 0$. 由第二章引理 6.15 知 (L_t) 为一致可积鞅.

3) 设 $M \in \mathcal{M}_0^2 \cap \mathcal{W}$. 由定理 2.3 知, 对任一有界鞅 N 有

$$\mathbb{E}[N_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s]. \tag{3.7}$$

由于有界鞅在 $\mathcal{M}^2$ 中关于范数 $\|M\| = \sqrt{\mathbb{E}[M_\infty^2]}$ 稠密, 故 (3.7) 对一切 $N \in \mathcal{M}^2$ 成立, 特别取 $N = M$, 有

$$\mathbb{E}[M_\infty^2] = \mathbb{E}[\sum_n (\Delta M_s)^2].$$

注意到 $M_0 = 0$, 由定理 3.8 知, $M \in \mathcal{M}^{2,d}$. ∎

定义 3.10 设 $M \in \mathcal{M}^2$. 由 Doob 不等式, $M_\infty^* = \sup_t |M_t| \in L^2$. 因此, M^2 为类 (D) 下鞅. 由 Doob-Meyer 分解定理, 存在唯一的可料可积增过程, 记作 $\langle M \rangle$, 使得 $M^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}_0$. $\langle M \rangle$ 称为 M 的 可料二次变差过程 或 尖括号过程.

设 $M, N \in \mathcal{M}^2$. 令

$$\langle M, N\rangle = \frac{1}{2}[\langle M+N\rangle - \langle M\rangle - \langle N\rangle].$$

$\langle M, N\rangle$ 称为 M 与 N 的 可料二次协变差过程.

定义 3.11 设 $M, N \in \mathcal{M}^2$. 令

$$[M, N]_t = M_0 N_0 + \langle M^c, N^c\rangle_t + \sum_{s \le t} \Delta M_s \Delta N_s, \quad t \ge 0, \tag{3.8}$$

其中 M^c, N^c 分别为 M, N 的连续鞅部分. $[M, N]$ 为适应可积变差过程 (定理 3.9.1). $[M, M]$(简记为 $[M]$) 是适应可积增过程. $[M]$ 称为 M 的二次变差过程 或 方括号过程,$[M, N]$ 称为 M 与 N 的二次协变差过程.

定理 3.12 设 $M, N \in \mathcal{M}^2$.

1) $[M, N]$ 为唯一的适应可积变差过程, 使得 $MN - [M, N] \in \mathcal{M}_0$ 及 $\Delta[M, N] = \Delta M \Delta N$.

2) $\langle M, N\rangle$ 为 $[M, N]$ 的可料对偶投影.

证明 1) 令 $M = M_0 + M^c + N^d$. 由定理 3.9 2) 知 $M^d N - [M^d, N] \in \mathcal{M}_0$, $M^c N^d \in \mathcal{M}_0$. 另一方面, 由定义 3.10,

$$M^c N - [M^c, N] = N_0 M_0^c + M^c N^c + M^c N^d - \langle M^c, N^c\rangle \in \mathcal{M}_0.$$

因此

$$\begin{aligned} MN - [M, N] =& M_0 N_0 + M^c N + M^d N \\ & - (M_0 N_0 + [M^c, N] + [M^d, N]) \in \mathcal{M}_0. \end{aligned}$$

此外, 由 (3.8) 得 $\Delta[M, N] = \Delta M \Delta N$. 唯一性由定理 2.2 推得.

2) 由于 $MN - \langle M, N\rangle \in \mathcal{M}_0$, 故 $[M, N] - \langle M, N\rangle \in \mathcal{M}_0$. 从而由第二章定理 6.16 知 $\langle M, N\rangle$ 为 $[M, N]$ 的可料对偶投影. ∎

§ 4. 局部鞅与半鞅

定义 4.1 设 M 为一右连左极适应过程. 如果存在一列停时 T_n, $T_n \uparrow +\infty$ 使得每个 $M^{T_n} - M_0$ 为一致可积 (可积变差鞅), 则称 M 为 局部鞅(局部可积变差鞅). 我们称 (T_n) 为 M 的 局部化序列.

今后, 我们分别用 $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ 及 $\mathcal{W}_{\text{loc}}$ 表示局部鞅及局部可积变差鞅全体.

引理 4.2 设 M 为一局部鞅, $\epsilon > 0$. 令

$$A = \sum_{s \leq \cdot} \Delta M_s I_{[|\Delta M_s| > \epsilon]},$$

则 $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$.

证明 显然 A 为适应有限变差过程. 设 (S_n) 为 M 的局部化序列. 令

$$T_n = \inf \left\{ t \geq 0 : | M_t - M_0 | \geq n \text{ 或} \sum_{s \leq t} | \Delta A_s | \geq n \right\} \wedge S_n ,$$

则 $T_n \uparrow \infty$, 且

$$\begin{aligned} | \Delta A_{T_n} \leq | \Delta M_{T_n} | \leq n + | M_{T_n} - M_0 |, \\ \sum_{s \leq T_n} | \Delta A_s | \leq \sum_{s < T_n} | \Delta A_s | + | \Delta A_{T_n} | \\ \leq n + | \Delta A_{T_n} | \leq 2n + | M_{T_n} - M_0 | . \end{aligned}$$

由于 $T_n \leq S_n$, 故有 $\mathbb{E}[|M_{T_n} - M_0|] < \infty$, 从而 $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$. ∎

下一定理是局部鞅的一个基本定理. 它表明, 研究局部鞅可归结为研究有界鞅和可积变差鞅.

定理 4.3 设 M 为一局部鞅, 则对任给 $\epsilon > 0, M$ 可作如下分解:

$$M = M_0 + U + V, \tag{4.1}$$

其中 U 为零初值局部有界鞅，且 $|\Delta U| \leq \epsilon, V$ 为零初值局部可积变差鞅.

证明 无妨假定 $M_0 = 0$. 令

$$A = \sum_{s\leq \cdot} \Delta M_s I_{[|\Delta M_s| > \frac{\epsilon}{2}]},$$

则由引理 4.2 知，$A \in \mathcal{A}_{\text{loc},0}, V = A - \widetilde{A} \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}, U = M - V \in \mathcal{M}_{\text{loc},0}$. 对任一可料时 T, 有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\Delta M_T I_{[T<\infty]} \mid \mathcal{F}_{T-}] = 0, \\ \Delta \widetilde{A}_T I_{[T<\infty]} &= \mathbb{E}[\Delta A_T I_{[T<\infty]} \mid \mathcal{F}_{T-}] \\ &= \mathbb{E}[(\Delta A_T - \Delta M_T) I_{[T<\infty]} \mid \mathcal{F}_T]. \end{aligned}$$

但是

$$|(\Delta A_T - \Delta M_T) I_{[T<\infty]}| = |\Delta M_T I_{[|\Delta M_T| \leq \frac{\epsilon}{2}, T<\infty]}| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

故在 $[T<\infty]$ 上有

$$|\Delta \widetilde{A}_T| \leq \frac{\epsilon}{2}, |\Delta U_T| \leq |\Delta M_T - \Delta A_T| + |\Delta \widetilde{A}_T| \leq \epsilon \quad \text{a.s.}.$$

对任一绝不可及时 T, 在 $[T<\infty]$ 上有 $\Delta \widetilde{A}_T = 0$ a.s., 及 $|\Delta U_T| = |\Delta M_T - \Delta A_T| \leq \epsilon/2$ a.s. 总之，对任一停时 T,

$$|\Delta U_T I_{[T\infty]}| \leq \epsilon \quad \text{a.s.},$$

即 $|\Delta U| \leq \epsilon$, 故 U 为局部有界鞅. ∎

系 4.4 设 M 为一局部鞅，则对一切 $t \geq 0$, 有

$$\sum_{s\leq t} (\Delta M_s)^2 < \infty \quad \text{a.s.}.$$

系 4.5 设 M 为一局部鞅，则它的上确界过程 $M^* \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$.

定理 4.6 若 M 既为局部鞅, 又是有限变差过程, 则 $M \in \mathcal{W}_{\text{loc}}$, 即

$$\mathcal{M}_{\text{loc}} \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}_{\text{loc}}.$$

证明 设 $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \cap \mathcal{V}$, 并按 (4.1) 分解为

$$M = M_0 + U + V,$$

其中 $V \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}, U$ 为零初值局部有界鞅. 由于 $U \in \mathcal{V}$ 且局部有界, 故 $U \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$, 从而 $U \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$. 最终得 $M \in \mathcal{W}_{\text{loc}}$. ∎

系 4.7 设 $A \in \mathcal{V}$. 为要 $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$, 必须且只需存在一可料有限变差过程 B, 使得 $A - B$ 为局部鞅.

定义 4.8 设 M 为一局部鞅, 称 M 为纯断局部鞅, 若 $M_0 = 0$, 且 M 可作如下分解:

$$M = U + V,$$

其中 $U \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,d}, V \in \mathcal{W}_{\text{loc}}$. 我们以 $\mathcal{M}_{\text{loc}}^d$ 记纯断局部鞅全体, 并以 $\mathcal{M}_{\text{loc}}^c$ 记连续局部鞅全体.

引理 4.9 设 M 为一局部鞅. 若 M 既是连续局部鞅, 又是纯断局部鞅, 则 $M = 0$.

证明 由于 $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^d$, 则 $M = U + V$, 其中 $U \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,d}, V \in \mathcal{W}_{\text{loc},0}$. 另一方面, $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c = \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,c}$, 故 $V \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2$. 由定理 3.9.3) 知, $V \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,d}$. 因此, 存在 M 的一个局部化序列 (T_n), 使得每个 M^{T_n} 既是连续平方可积鞅又是纯断平方可积鞅, 从而对每个 $n, M^{T_n} = 0$. 于是 $M = 0$. ∎

注 由引理 4.9 知, 任何局部鞅 M 有如下分解:

$$M = M_0 + M^c + M^d,$$

其中 M^c 是初值为零的连续局部鞅, M^d 是纯断局部鞅. 我们称 $M^c(M^d)$ 为 M 的 连续 (纯断) 鞅部分.

系 4.10 设 M, N 为两个纯断局部鞅, 且 $\Delta M = \Delta N$, 则 $M = N$.

定义 4.11 设 M,N 为两个局部鞅，M^c,N^c 分别为它们的连续鞅部分，定义

$$[M,N]_t = M_0N_0 + \langle M^c,N^c\rangle_t + \sum_{s\le t}\Delta M_s\Delta N_s.$$

$[M,N]$ 为适应有限变差过程. $[M,N]$ 称为 M 与 N 的二次协变差过程. 易见, 对任一停时 T, 有 $[M^T,N]=[M,N]^T$. 若 $M,N\in\mathcal{M}^2_{\rm loc}$ 则 $[M,N]\in\mathcal{A}_{\rm loc}$. 我们用 $\langle M,N\rangle$ 记 $[M,N]$ 的可料对偶投影.

特别，$[M,M]$(简记为 $[M]$) 为适应增过程，称为 M 的二次变差过程. 易见，$M=0$ 当且仅当 $[M]=0$; $M\in\mathcal{M}^c_{\rm loc}$, 当且仅当 $[M]$ 连续；$M\in\mathcal{M}^d_{\rm loc}$, 当且仅当 $[M]$ 纯断.

定理 4.12 设 M 为一局部鞅, 则 $\sqrt{[M]}$ 为局部可积增过程.

证明 不妨设 $M_0=0$. 令

$$M=U+V,$$

其中 $U\in\mathcal{M}^2_{\rm loc,0}$,$V\in\mathcal{W}_{\rm loc,0}$. 我们有

$$\sqrt{[M]}\le\sqrt{[U]+[V]+2[U][V]}\le\sqrt{[U]}+\sqrt{[V]}.$$

又由于 $[U]\in\mathcal{M}^+_{\rm loc}$ 及 $\sum_{s\le\cdot}|\Delta V_s|\in\mathcal{A}^+_{\rm loc}$, 故 $\sqrt{[M]}\in\mathcal{A}^+_{\rm loc}$. ∎

定理 4.13 设 M,N 为两个局部鞅, 则 $[M,N]$ 为唯一的适应有限变差过程，使得 $MN-[M,N]\in\mathcal{M}_{\rm loc,0}$ 及 $\Delta[M,N]=\Delta M\Delta N$.

证明 首先证明 $MN-[M,N]$ 为局部鞅. 为此只需对 $M=N$ 的情形证明这一事实. 不妨设 $M_0=0$. 令 $M=U+V$, 其中 U 为零初值局部有界鞅，$V\in\mathcal{W}_{\rm loc,0}$. 我们有

$$M^2-[M]=U^2-[U]+V^2+2(UV-[U,V]).$$

显然，$U^2-[U]\in\mathcal{M}^2_{\rm loc,0}$,$UV-[U,V]\in\mathcal{M}_{\rm loc,0}$. 由于

$$V_t^2-[V]_t=V_t^2-\sum_{s\le t}(\Delta V_s)^2=2\int_{]0,t]}V_{s-}dV_s,$$

从而 $V^2-[V]\in\mathcal{M}_{\text{loc},0}$, 因此 $M^2-[M]\in\mathcal{M}_{\text{loc},0}$. 由定义, 显然有 $\Delta[M,N]=\Delta M\Delta N$.

现设 A 为一适应有限变差过程, 使得 $MN-A\in\mathcal{M}_{\text{loc},0}$ 及 $\Delta A=\Delta M\Delta N$, 则 $A-[M,N]$ 连续, 且 $A-[M,N]\in\mathcal{W}_{\text{loc},0}$. 由引理 4.9 知, $A=[M,N]$. ∎

下一定理将在定义可料过程对局部鞅的随机积分时起重要作用.

定理 4.14 设 M 为一局部鞅, T 为一停时, $\xi\in\mathcal{F}_T$ 为一实值随机变量, 则

$$N=\xi(M-M^T)$$

为局部鞅, 且对任一局部鞅 L, 有

$$[N,L]=\xi([M,L]-[M,L]^T).$$

证明 首先假设 M 为一致可积鞅, 且 ξ 有界, 则对 $t\geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_\infty\mid\mathcal{F}_t]&=\mathbb{E}[\xi(M_\infty-M_T)\mid\mathcal{F}_t]\\&=\mathbb{E}[\xi(M_\infty-M_T)\mathcal{F}_{t\vee T}\mid\mathcal{F}_t]\\&=\mathbb{E}[\xi(M_{t\vee T}-M_T)\mid\mathcal{F}_t]\\&=\xi I_{[T\leq t]}(M_t-M_{t\wedge T})=N_t\,,\end{aligned}$$

故 N 为一致可积鞅.

对一般情形, 不妨设 $M_0=0$. 令 (T_n) 为 M 的局部化序列. 置

$$S_n=T_n\wedge T_{[|\xi|>n]}\,,\quad n\geq 1,$$

则 $S_n\uparrow\infty$, 且 (S_n) 为 N 的局部化序列: 对每个 n

$$\begin{aligned}N^{S_n}&=[\xi(M-M^T)]^{S_n}\\&=\xi I_{[|\xi|\leq n]}(M-M^T)^{T_n}\\&\xi I_{[|\xi|\leq n]}(M^{T_n}-M^{T_n\wedge T})\in\mathcal{M}_0\,.\end{aligned}$$

最后，对任一局部鞅 L, 令

$$A = \xi([M,L] - [M,L]^T).$$

我们有

$$\Delta A = \xi\Delta([M,L] - [M,L]^T = \xi\Delta(M - M^T)\Delta L = \Delta N\Delta L.$$

另一方面，由定理 4.13,$ML - [M,L]$ 为局部鞅，故由前所证，

$$\begin{aligned} NL - A &= \xi(M - M^T)L - \xi([M,L] - [M,L]^T) \\ &= \xi\{(ML - [M,L]) - (ML - [M,L])^T\} - \xi M_T I_{[T<\infty]}(L - L^T) \end{aligned}$$

为局部鞅. 再由定理 4.13 知 $A = [N,L]$. ∎

下一定理给出了局部鞅的跳过程的刻画，它将在定义随机积分时起重要作用.

定理 4.15 设 H 为一可选过程，使得 $[H \neq 0]$ 为一列停时图的并. 为要 H 为一局部鞅 M 的跳过程 ΔM, 必须且只需它满足下列条件:

i) ${}^pH = 0$,

ii) $\sqrt{\Sigma_{s\leq\cdot} H_s^2} \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

证明 必要性显然，往证充分性. 首先假定 $\sum_{s\leq\cdot} H_s^2 \in \mathcal{A}^+$, 令 $[H \neq 0] \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$, 其中每个 T_n 为可料时或绝不可及时, $T_n > 0, [\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] =, n \neq m$. 令

$$A^n = H_{T_n} I_{[\![T_n,\infty[\![}, \ M^n = A^n - \widetilde{A^n},$$

则 $\mathcal{M}^{2,d}$ 中的正交级数 $\sum_n M^n$ 收敛于 $M \in \mathcal{M}^{2,d}$, 且有 $H = \Delta M$(参看定理 3.8 的证明). 其次，设 $\sum_{s\leq\cdot} H_s^2 \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$. 则由局部化方法可知，存在 $M \in \mathcal{M}^{2,d}_{\mathrm{loc}}$, 使得 $H = \Delta M$.

对一般情形，令

$$A=\sum_{s\leq\cdot}H_s^2,\ K=HI_{[|H|>1]},\ H'=K-{}^pK,$$
$$H''=H-H',\quad B=\sum_{s\leq\cdot}|K_s|,$$

则 ${}^p(H')={}^p(H'')=0$. 由于 $|\Delta B|\leq\sqrt{|\Delta A|}$, 故 $B\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}^+$, 从而

$$\sum_{s\leq\cdot}|{}^pK_s|\leq\sum_{s\leq\cdot}({}^p|K|)_s=\sum_{s\leq\cdot}\Delta\widetilde{B}_s\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}^+.$$

因此有 $\sum_{s\leq\cdot}|H_s'|\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}^+$. 令 $M'=\sum_{s\leq\cdot}H_s'-\widetilde{\sum_{s\leq\cdot}H_s'}$, 则 $M'\in\mathcal{W}_{\mathrm{loc},0}$, 且 $\Delta M'=H'-{}^p(H')=H'$. 另一方面，由于 ${}^pH=0$, 我们有

$$H''=H-K-{}^pK=HI_{[|H|\leq 1]}-{}^p(HI_{[|H|\leq 1]}),$$

从而 $|H''|\leq 2$. 因此 $\sum_{s\leq\cdot}(H_s'')^2\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}^+$. 由上所证，存在 $M''\in\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2d}$ 使 $\Delta M''=H''$. 因此 $M=M'+M''$ 即为所求局部鞅. ∎

定义 4.16 设 $X=(X_t)$ 为一右连左极适应过程，称 X 为半鞅，如果 X 可作如下分解:

$$X=M+A,\tag{4.2}$$

其中 M 为局部鞅， A 为适应有限变差过程. 半鞅全体记作 $\mathcal{S}$.

若 X 为一半鞅， T 为一停时，则 X^T 为半鞅. 此外，令

$$X^{T-}=X^T-\Delta X_T I_{[T,\infty[},$$

则 X^{T-} 也为半鞅.

在半鞅的分解 (4.2) 中， M 的连续 (局部) 鞅部分 M^c 被半鞅 X 唯一决定 (引理 4.9), 称它为半鞅 X 的连续鞅部分，记作 X^c. 容易看出，对任一停时 T, 有

$$(X^T)^c=(X^c)^T,\quad (X^{T-})^c=(X^c)^T.$$

设 X,Y 为两个半鞅. 令

$$[X,Y]_t = X_0Y_0 + \langle X^c, Y^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta X_s \Delta Y_s \ , \ t \geq 0,$$

$[X,Y]$ 称为 X 与 Y 的二次协变差过程.$[X,X]$ 也简记为 $[X]$, 它为适应增过程, 称为 X 的二次变差过程.

定义 4.17 设 X 为一半鞅, 称 X 为特殊半鞅, 如果 X 可作如下分解:

$$Y = M + A \ ,$$

其中 M 为局部鞅, A 为适应局部可积变差过程. 若特殊半鞅 X 有另一分解: $X = N + B$, 其中 N 为局部鞅, B 为适应有限变差过程, 则 B 必为适应局部可积变差过程. 事实上, $B - A = M - N$ 为局部鞅, 也为有限变差过程. 由定理 4.6,$B - A \in \mathcal{W}_{\mathrm{loc},0}$, 从而 $B \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$. 特殊半鞅全体记作 $\mathcal{S}_p$.

定理 4.18 设 X 为一特殊半鞅, 则 X 有如下唯一分解:

$$X = M + A \ ,$$

其中 M 为局部鞅, A 为零初值可料有限变差过程. 今后, 称这一分解为特殊半鞅 X 的典则分解.

证明 令 $X = N + B$, 其中 $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$, $B \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc},0}$. 令 $A = \widetilde{B}, M = N + \widetilde{B}$, 即得所需之分解式. 唯一性显然. ∎

下一定理给出特殊半鞅的几个有用的刻画.

定理 4.19 设 X 为一半鞅, 则下列命题等价:

1) X 为特殊半鞅,

2) $\sqrt{[X]}$ 为局部可积增过程,

3) $X^* = (X_t^*)$ 为局部可积增过程.

证明 1)⇒2). 设 X 为特殊半鞅, $X = M + A$ 为其典则分解. 我们有

$$\sqrt{[X]} = \sqrt{[M] + [A] + 2\sqrt{[M][A]}} = \sqrt{[M]} + \sqrt{[A]} \ .$$

由于 $\sqrt{[M]} \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$(定理 4.12) 及 $\sqrt{[A]} = \sqrt{\Sigma_{s\leq \cdot} \Delta A_s^2} \leq \Sigma |\Delta A| \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$. 故有 $\sqrt{[X]} \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$.

2)⇒3). 设 $\sqrt{[X]} \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$. 由于 $(\Delta X)^* \leq \sqrt{\Sigma_{s\leq \cdot} \Delta X_s^2} \leq \sqrt{[X]}$, $X^* \leq (\Delta X)^* + (X_-)^*$,$X_-$ 局部有界, 故 $X^* \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$.

3)⇒1). 设 $X^* \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$ 及 $X = M + A$, 其中 $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}, A \in \mathcal{V}_0$. 由于 $M^* \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$(系 4.5), 故 $A^* \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$, 从而 $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$,$X \in \mathcal{S}_p$. ∎

系 4.20 局部有界半鞅为特殊半鞅. 特别, 跳有界的半鞅或可料半鞅为特殊半鞅.

第四章 随机积分

§1. 可料过程对局部鞅的随机积分

在本节中我们将定义可料过程对局部鞅的随机 (不定) 积分，积分所得过程仍为局部鞅. 首先，对初等可料过程，可用自然的方式定义随机积分，且不难给出这类随机积分的刻画. 然后，在此基础上给出一般可料过程对局部鞅的随机积分定义.

设 S,T 为两个停时，且 $S \leq T, \xi$ 为一 $\mathcal{F}_S$- 可测实值随机变量. 令 $H = \xi I_{]S,T]}$, 则 H 为可料过程. 设 M 为一局部鞅， H 对 M 的随机积分记作 $H.M$, 自然应定义为

$$(H.M)_t = \xi(M_{t\wedge T} - M_{t\wedge S}),\ t \geq 0.$$

由第三章定理 4.14 知， $H.M$ 为局部鞅，且对任一局部鞅 N, 有

$$[H.M, N] = \xi([M,N]^T - [M,N]^S) = H.[M,N],$$

其中 $H.[M,N]$ 为 H 对 $[M,N]$ 的 Stieltjes(不定) 积分. 此外，由第三章定理 4.13 知，如上定义的 $H.M$ 是唯一的局部鞅 L, 使得对任一局部鞅 N, 有

$$[L,N] = H.[M,N]. \tag{1.1}$$

这个例子启发我们引进下述随机积分的定义.

定义 1.1 设 M 为一局部鞅， H 为一可料过程. 如果存在 (唯一的) 局部鞅 L, 使得 (1.1) 对一切局部鞅 N 成立 (这包含了 H 对 $[M,N]$ 可积的假设), 则称 H 对 M 在局部鞅积分意义下可积 (或简称可积), 称 L 为 H 对 M 的随机积分，记作 $H.M$. 对 M 可积的可料过程全体记作 $L_m(M)$.

通常，我们也使用下列随机积分记号：对 $t \geq 0$, 令

$$\int_0^t H_s dM_s = (H.M)_t - H_0 M_0\ .$$

下一定理给出了 $L_m(M)$ 的刻画.

定理 1.2 设 M 为一局部鞅, H 为一可料过程, 则 $H \in L_m(M)$ 当且仅当 $\sqrt{H^2.[M]} \in \mathcal{A}_{\rm loc}^+$.

证明 必要性. 在 (1.1) 中令 $N = H.M$ 得

$$[H.M] = H.[M, H.M] = H^2.[M].$$

由于 $H.M \in \mathcal{M}_{\rm loc}$, 由第三章定理 4.12, 有 $\sqrt{H^2.[M]} = \sqrt{[H.M]} \in \mathcal{A}_{\rm loc}^+$.

充分性. 只要证明存在 $L' \in \mathcal{M}_{\rm loc}^c$ 及 $L'' \in \mathcal{M}_{\rm loc}^d$ 使得对每个 $N \in \mathcal{M}_{\rm loc}$, 有

$$[L', N] = H.[M^c, N], \tag{1.2}$$
$$[L'', N] = H.[M^d, N], \tag{1.3}$$

因为这时令 $L = H_0M_0 + L' + L''$, 即有 $L = H.M$. 由第三章定理 4.15, 存在唯一的 $L'' \in \mathcal{M}_{\rm loc}^d$, 使得 $\Delta L'' = H\Delta M$. 因此 (1.3) 成立. 往证 L' 的存在性. 不妨假定 $\mathbb{E}[(H^2.[M^c])_\infty] < \infty$. 由于 $\forall N \in \mathcal{M}_0^{2,c}$, 我们有

$$|\, [M^c, N]_t - [M^c, N]_s \,| \le ([M^c]_t - [M^c]_s)^{1/2}([N]_t - [N]_s)^{1/2}.$$

故由 Schwarz 不等式容易证明如下的 Kunita-Watanabe 不等式 (见 [HWY]):

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |H_s||d[M^c, N]_s|\right] \le (\mathbb{E}\int_0^\infty H_s^2 d[M^c]_s)^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}[N]_\infty)^{\frac{1}{2}} .$$

因此, $N \longmapsto \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s d[M^c, N]_s\right]$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{M}_0^{2,c}$ 上的有界线性泛函. 由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 $L' \in \mathcal{M}_0^{2,c}$, 使得对一切 $N \in \mathcal{M}_0^{2,c}$, 有

$$\mathbb{E}[L', N]_\infty = \mathbb{E}[L'_\infty N_\infty] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s d[M^c, N]_s\right] . \tag{1.4}$$

设 T 为一停时，在 (1.4) 中以 N^T 代 N 得

$$\mathbb{E}[L',N]_T = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s d[M^c,N]_s\right].$$

由第二章引理 6.15 知， $A = [L',N] - H.[M^c,N] \in \mathcal{M}$. 但 A 是零初值适应连续有限变差过程，故由第三章定理 2.2 知 $A = 0$, 即

$$[L',N] = H.[M^c,N].$$ ∎

下一定理概括了随机积分的基本性质.

定理 1.3 设 M 为局部鞅， $H,K \in L_m(M)$.

1) $L_m(M) = L_m(M^c) \cap L_m(M^d), (H.M)_0 = H_0M_0, (H.M)^c = H.M^c, (H.M)^d = H.M^d$.

2) $\Delta(H.M) = H\Delta M$.

3) $H + K \in L_m(M)$, 且 $(H + K).M = H.M + K.M$.

4) 设 H' 为一可料过程，则 $H' \in L_m(H.M)$, 当且仅当 $(HH') \in L_m(M)$. 这时有

$$H'.(H.M) = (H'H).M.$$

5) 设 T 为一停时，则

$$(H.M)^T = H.M^T = (HI_{[0,T]}).M.$$

证明 1) 及 2) 已在定理 1.2 中证过， 3)—5) 显然. ∎

下一定理表明，若被积过程为局部可积变差鞅，这里定义的随机积分与按轨道的 Stielties 积分一致.

定理 1.4 设 M 为一局部可积变差鞅， H 为一可料过程.

1) 若 $\Sigma|H\Delta M \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}^+$, 则 $H \in L_m(M)$, 且对几乎所有的 ω,

$$(H.M)_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega)dM_s(\omega),\ \forall t \geq 0, \tag{1.5}$$

这里右边是 Stieltjes 积分. 为明确起见，有时将它记作 H_sM.

2) 若 $\Sigma|H\Delta| \in \mathcal{V}^+$ 且 $H \in L_m(M)$, 则 (1.5) 也成立.

证明 由于 $\Sigma|H\Delta M| \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$, 由第二章定理 6.10 易知, Stieltjes 积分 $H_s M$ 存在. 又由第三章定理 2.4 知, $H_s M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$. 另一方面,

$$\sqrt{H^2.[M]} \leq \sum_{s \leq \cdot} |H_s \Delta M_s| \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}},$$

故 $H.M$ 存在, 且 $\Delta(H.M) = H\Delta M = \Delta(H_s M)$. 由于 $H.M - (H.M)_0$ 及 $H_s M - (H_s M)_0$ 都是纯断局部鞅, 且 $(H.M)_0 = H_0 M_0 = (H_s M)_0$, 故 $H.M = H_s M$. 1) 得证. 2) 容易由 1) 推得. ∎

下一定理给出了循序可测过程对连续局部鞅的随机积分的定义.

定理 1.5 设 M 为一连续局部鞅, H 为一循序可测过程. 为要存在 $L \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$, 使得 (1.1) 对一切 $N \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ 成立, 必须且只需 $H^2.[M] \in \mathcal{V}^+$. 这时存在可料过程 $K \in L_m(M)$, 使得 $K.M = L$. 我们称 H 对 M 可积, 称 L 为 H 对 M 的随机积分, 记作 $H.M$.

证明 必要性是容易的 (在 (1.1) 中令 $N = L$), 往证充分性. 设 $H^2[M] \in \mathcal{V}^+$. 令 W 为 $\mu_{H.[M]}$ 关于 $\mu_{[M]}$ 在可选 σ- 域上的 Radon-Nikodym 导数, 则由第二章定理 6.7 易知, $W.[M] = H.[M], W^2.[M] = H^2.[M]$. 由于 W 是可选过程, 故由第二章定理 2.15, 存在可料过程 K, 使得 $[K \neq W]$ 为一列停时图的并. 因此 $K^2.[M] = W^2.M = H^2.[M]$. 令 $L = K.M$, 对一切 $N \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$, 有

$$[L, N] = K.[M, N] = W.[M, N] = H.[M, N]. \qquad ∎$$

最后, 我们定义适应可测过程对一类连续局部鞅的随机积分, 它推广了经典的 Itô 积分.

定理 1.6 设 M 为一连续局部鞅, H 为一适应可测过程. 假定存在一连续增函数 $a = (a_t)$ 使得对几乎所有的 $\omega, d[M].(\omega)$ 关于 da 绝对连续. 则为要存在 $L \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$, 使得 (1.1) 对一切 $N \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ 成立, 必须且只需 $H^2.[M] \in \mathcal{V}^+$. 这时存在可料过程 $K \in L_m(M)$,

使得 $K.M = L$. 我们称 H 对 M 可积，称 L 为 H 对 M 的随机积分，记作 $H.M$.

证明 必要性是容易的 (在 (1.1) 中令 $N = L$), 往证充分性. 令 $W = H/1 + H, \overline{H} = {}^{o}W/1 - {}^{o}W$, 其中 ${}^{o}W$ 为 W 的可选投影. 易见 $\overline{H}$ 为 H 的可选修正. 由于 $d[M]$ 关于 da 绝对连续，将 $d[M]_s$ 表示为 $\frac{d[M]_s}{da_s} da_s$, 由 Fubini 定理容易证明 $\overline{H}^2.[M] = H^2.[M]$, 故由定理 1.5 推得本定理的结论. ∎

§ 2. 可料过程对半鞅的随机积分

由于每个半鞅为一局部鞅与一适应有限变差过程之和. 自然会想到对半鞅的随机积分可定义为对这两部分的随机积分之和，但关键在于这两个随机积分的和应不依赖于半鞅的具体分解. 下一引理保证了这一点.

引理 2.1 设 X 为一半鞅， H 为一可料过程，令 $X = M + A, X = N + B$ 为 X 的两个分解，其中 $M, N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}, A, B \in \mathcal{V}_0$. 若 $H \in L_m(M) \cap L_m(N), H_{\dot{s}}$ 及 $H_{\dot{s}}B$ 存在，则

$$H.M + H_{\dot{s}}A = H.N + H_{\dot{s}}B. \tag{2.1}$$

证明 由于 $M - N = B - A \in \mathcal{W}_{\mathrm{loc},0}$, 由定理 1.4.2) 得

$$H.(M - N) = H_{\dot{s}}(B - A),$$

即 (2.1) 成立. ∎

定义 2.2 设 X 为一半鞅，H 为一可料过程. 如果存在 X 的一个分解： $X = M + A$, 其中 $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}, A \in \mathcal{V}_0$, 使得 $H \in L_m(M)$, $H_{\dot{s}}A$ 存在，我们称 H 对 X 在半鞅积分意义下可积 (或简称可积), $X = M + A$ 为 X 的一个 H- 分解. 这时，令

$$H.X = H.M + H_{\dot{s}}A. \tag{2.2}$$

$H.X$ 不依赖于 X 的 H- 分解，称为 H 对 X 的随机积分.

对 X 在半鞅积分意义下可积的可料过程全体记为 $L(X)$.

注 若 H 对 M 在半鞅积分意义下可积，一般说来我们不能断言 $H.M$ 仍是局部鞅，即 H 对 M 在局部鞅积分意义下未必可积. 例如，设 $M \in \mathcal{W}_{\mathrm{loc},0}$,H 为一可料过程，使得 Stieltjes 积分 $H_{\dot{s}}M$ 存在，但 $H_{\dot{s}}M \notin \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$, 则 $H \notin L_m(M)$.

下一定理概括了可料过程对半鞅的随机积分的基本性质，它们是定理 1.3 的直接推论.

定理 2.3 设 X 为一半鞅， $H \in L(X)$.

1) $(H.X)^c = H.X^c, \Delta(H.X) = H\Delta X, (H.X)_0 = H_0X_0$.

2) 对任一停时 T, 有

$$(H.X)^T = H.X^T = (H(_{[\![0,T]\!]}).X,\ (H.X)^{T-} = H.X^{T-}.$$

3) 对任一半鞅 Y, 有

$$[H.X, Y] = H.[X, Y].$$

4) 若 Y 为一半鞅， $H \in L(Y)$, 则 $H \in L(X+Y)$, 且 $H.(X+Y) = H.X + H.Y$.

5) 若 K 为一可料过程且 $|K| \leq |H|$, 则 $K \in L(X)$.

定理 2.4 设 X 为一特殊半鞅， $X = M + A$ 为其典则分解. 设 $H \in L(X)$, 则为要 $H.X$ 是特殊半鞅，必须且只需 $X = M + A$ 为 X 的一个 H- 分解.

证明 充分性显然，往证必要性. 设 $X = N + B$ 为 X 的 H- 分解，其中 $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}, B \in \mathcal{V}_0$, 则 $H.X = H.N + H.B \in \mathcal{S}_p$, $H.B \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$. 由于 $A = \widetilde{B}$, 由第二章定理 6.11 知， H 对 A 可积且 $H.A = \widetilde{H.B}$. 我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{H^2.[M]} &\leq \sqrt{H^2.[X]} + \sqrt{H^2.[A]} \\ &\leq \sqrt{[H.X]} + \sum_{s\leq \cdot} |H_s\Delta A_s|.\end{aligned}$$

由于 $\sqrt{[H.X]} \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}^+$, 故 $\sqrt{H^2.[M]} \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}^+$, 即 $H \in L_m(M)$. 因此，$X = M + A$ 为 X 的 H- 分解. ∎

下一定理是上述定理的一个重要推论.

定理 2.5 设 X 为一半鞅, $H \in L(X)$. 令 U 为可选集, 使得 $U \supset [|H\Delta| > 1 或 |\Delta X| > 1]$, 且对几乎所有 ω, 对一切 $t > 0, \{s : (\omega, s) \in U\} \cap [0, t]$ 至多含有穷个点. 置

$$A_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s I_{[(\cdot, s) \in U]}, \ Z_t = X_t - A_t, \ t \geq 0,$$

则 $H \in L(Z)$, 且特殊半鞅 Z 的典则分解 $Z = N + B$ 为 H- 分解.

证明 在定理条件下, 显然 $A = (A)_t$ 有定义, 且 A 为一阶梯有限变差过程, 故 H 对 A 可积, 从而 H 对 Z 可积. 此外, 我们有 $|\Delta Z| \leq 1, |\Delta(H.Z)| = |H\Delta Z| \leq 1$, 从而 $Z, H.Z$ 为特殊半鞅. 于是由定理 2.4,Z 的典则分解 $Z = N + B$ 为 Z 的 H- 分解. ∎

下面我们应用定理 2.5 进一步研究随机积分的性质.

定理 2.6 设 X 为一半鞅.

1) $H, K \in L(X) \Rightarrow H + K \in L(X)$.

2) 设 $H \in L(X)$,K 为一可料过程. 为要 $K \in L(H.X)$, 必须且只需 $KH \in L(X)$. 这时有 $K.(H.X) = (KH).X$.

证明 1) 在定理 2.5 中, 令 $U = [|H\Delta X| > 1 或 |K\Delta X| > 1$ 或 $|\Delta X| > 1]$, 则 $X = N + (A + B)$ 既是 H- 分解, 又是 K- 分解, 所以是 $(H + K)$- 分解, 即 $H + K \in L(X)$.

2) 必要性显然, 往证充分性. 设 $KH \in L(X)$. 在定理 2.5 中, 令 $U = [|H\Delta X| > 1$ 或 $|KH\Delta X| > 1$ 或 $|\Delta X| > 1]$, 则 $X = N + (A + B)$ 既是 H- 分解, 又是 KH- 分解. 这表明 $H.X = H.N + H.(A + B)$ 是 $H.X$ 的 K- 分解. 因此 $K \in L(H.X)$ 且

$$\begin{aligned} K.(H.X) &= K.(H.N) + K.(H.(A + B)) \\ &= (KH).N + (KH).(A + B) \\ &= (KH).X. \end{aligned}$$

∎

定理 2.7 设 X 为一半鞅, H 为一可料过程. 如果存在停时 $T_n \uparrow \infty$, 使得对每个 n 有 $H \in L(X^{T_n})$, 则 $H \in L(X)$.

证明 由于 $H^2.[X]^{T_n} = [H.X^{T_n}]$, 故 $H^2.[X]$ 为增过程. 令

$$A = \sum_{s \leq \cdot} \Delta X_s I_{[|H_s \Delta X_s|>1 \text{或} |\Delta X_s|>1]}, \quad Z = X - A,$$

则 A 为一阶梯有限变差过程, 故 $H.A$ 存在. 因此只需证 $H \in L(Z)$. 设 $Z = N + B$ 为特殊半鞅 Z 的典则分解. 对每个 $n, Z^{T_n} = N^{T_n} + B^{T_n}$ 是 Z^{T_n} 的典则分解. 由于 $|\Delta(H.Z^{T_n})| = |H\Delta Z^{T_n}| \leq 1$ 故 $H.Z^{T_n} \in \mathcal{S}_p$. 由定理 2.4 ,$H.N^{T_n}$ 及 $H.B^{T_n}$ 存在. 所以 $H.N$ 及 $H.B$ 存在, 即 $H \in L(Z)$. ∎

下面两个定理是随机积分的收敛定理, 其证明见 [HWY].

定理 2.8 设 X 为一半鞅, T 为一有穷停时, B 为一可测集, $H, H^{(n)}, n \geq 1$, 为局部有界可料过程. 如果对几乎所有 $\omega \in B$, 在 $[0, T(\omega)]$ 上 $(H^{(n)}.(\omega))_{n \geq 1}$ 一致有界且收敛于 $H.(\omega)$, 则

$$I_B \sup_{t \leq T} |(H^{(n)}.X)_t - (H.X)_t| \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty.$$

定理 2.9 设 X 为一半鞅, $H \in L(X), K^{(n)}$ 及 K 为可料过程, 使得 $|K^{(n)}| \leq |H|, |K| \leq |H|$. 令 $B \in \mathcal{F}, T$ 为一有穷停时. 如果对几乎所有的 $\omega \in B$, 对一切 $t \in [0, T(\omega)]$, 有 $\lim_{n \to \infty} K_t^{(n)}(\omega) = K_t(\omega)$, 则

$$I_B \sup_{t \leq T} |(K^{(n)}.X)_t - (K.X)_t| \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty.$$

§ 3. Itô 公式

本节将证明半鞅的变量替换公式, 即著名的 Itô 公式. 它是随机分析中最有力的工具之一. 作为它的应用, 我们将证明半鞅的 Doléans-Dade 指数公式及 Lévy 关于 Brown 运动的鞅刻画定理.

定理 3.1 设 M 为一局部鞅, A 为一可料有限变差过程, 则 $MA - (M_-).A$ 为一局部鞅.

证明 不妨设 M 为一致可积鞅, A 的变差过程一致有界 (第二章定理 6.6). 令 $L = MA - M_-.A$. 由于对任一停时 T, M_-^T 为过程 $X_t = M_T$ 的可料投影, 故有

$$\mathbb{E}[M_T A_T] = \mu_{A^T}(X) = \mu_{A^T}(M_-^T) = \mathbb{E}[M_-.A)_T],$$

即有 $\mathbb{E}[L_T] = 0$. 于是由第二章引理 6.15 知, $L \in \mathcal{M}$. ∎

定理 3.2 设 X, Y 为两个半鞅, 则有如下的分部积分公式:

$$X_t Y_t = \int_0^t X_{s-} dY_s - \int_0^t Y_{s-} dX_t + [X, Y]_t,\ t \geq 0. \tag{3.1}$$

证明 只需对 $X = Y$ 的情形证明 (3.1), 即证明

$$X^2 = 2(X_-).X - 2X_0^2 + [X]. \tag{3.2}$$

为此令 $A = X^2 - 2(X_-).X + 2X_0^2$. 首先证明 A 为增过程, 且 $\Delta A = (\Delta X)^2$. 令 $t > 0$. 设

$$\tau_n\ :\ 0 = t_0^n < t_1^n \cdots < t_{m(n)}^n = t$$

为 $[0, t]$ 的一列有限分割, 且 $\delta(\tau^n) \to 0$, 则

$$\begin{aligned}
X_t^2 - X_0^2 &= \sum_i (X_{t_{i+1}^n}^2 - X_{t_i^n}^2) \\
&= 2\sum_i X_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) + \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \\
&= 2(H^{(n)}.X)_t - 2X_0^2 + \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2,
\end{aligned}$$

其中

$$H^{(n)} = X_0 I_{[\![0]\!]} + \sum_i X_{t_i^n} I_{]\!]t_i^n - t_{i-1}^n]\!]}.$$

由定理 2.8 知,

$$X_0^2 + \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} A_t, \quad n \to \infty. \tag{3.3}$$

特别，由 (3.3) 知， A 为增过程. 由 A 的定义有

$$\begin{aligned}\Delta A &= \Delta(X^2) - 2X_-\Delta X \\ &= (X_- + \Delta X)^2 - X_-^2 - 2X_-\Delta X = (\Delta X)^2.\end{aligned}$$

为证明 (3.2), 先设 X 有界. 这时 X 为特殊半鞅. 令 $X = M+A'$ 为其典则分解，其中 M 为局部有界的局部鞅， A' 为零初值可料有限变差过程. 令

$$B = X^2 - 2(X_-).X + 2X_0^2 - [X] = A - [X].$$

由上面所证， B 为零初值连续有限变差过程. 另一方面，注意到 $X_0 = M_0$, 我们有

$$\begin{aligned}B &= (M + A') - 2(M_- + A'_-).(M + A') + 2M_0^2 - [M + A'] \\ &= (M^2 - [M]) - 2(M_-.M - M_0^2) + 2(MA' - M_-.A') \\ &\quad - 2A'_-.M - 2[M, A'].\end{aligned} \tag{3.4}$$

这里我们利用了 Stieltjes 积分的分部积分公式. 由于 $[M, A'] = (\Delta M).A'$, 故由第二章定理 6.13.2) 知,

$$(\widetilde{[M, A']}) = {}^p(\Delta M).A' = 0,$$

故 $[M, A']$ 为局部鞅. 于是由 (3.4) 及引理 3.1 知， B 为一局部鞅，从而由第三章定理 2.2, 必有 $B = 0$, 即 (3.2) 成立.

对 X 为一般情形，为证 (3.2), 不妨设 $X_0 = 0$. 令 $T_n = \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq n\}$, 则 X^{T_n-} 为有界半鞅，且

$$\begin{aligned}(X^2)^{T_n-} &= (X^{T_n-})^2 = 2X_-^{T_n-}.X^{T_n-} + [X^{T_n-}] \\ &= (2X_-.X + [X])^{T_n-}.\end{aligned}$$

由于 $T_n \uparrow \infty$, 故 (3.2) 成立. ∎

注 在上面的证明中，我们证明了：对 $t \geq 0$ 有

$$X_0^2 + \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \xrightarrow{P} [X]_t, \quad n \to \infty.$$

这正是我们称 $[X]$ 为 X 的二次变差过程的理由.

定理 3.3 令 $X_t=(X_t^1,\cdots,X_t^d)$ 为 d- 维半鞅. 设 F 为 R^d 上的 C^2- 函数 (即 F 有连续的一阶与二阶偏导数). 则

$$F(X_t)-F(X_0)=\sum_{j=1}^{d}\int_0^t D_jF(X_{t-})dX_t^j+\sum_{0<s\leq t}\eta_s(F)+\frac{1}{2}A_t(F), \tag{3.5}$$

其中

$$\eta_s(F)=F(X_s)-F(X_{s-})-\sum_{j=1}^{d}D_JF(X_{s-})\Delta X_s^j, \tag{3.6}$$

$$A_t(F)=\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t D_{ij}F(X_{t-}d((X^j)^c,(X^j)^c)_s, \tag{3.7}$$

$D_jF=\dfrac{\partial F}{\partial x_j}, D_{i,j}F=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}$,(3.5) 中级数 $\sum_{0<s\leq t}\eta_s(F)$ 绝对收敛. (3.5) 就是著名的 Itô 公式.

证明 我们从分部积分公式出发证明 Itô 公式. 由于 (3.5) 两边的过程有相同的跳, 若 (3.5) 对 X^{T-} 成立, 则对 X^T 也成立. 因此不妨设 $X^1,\cdots,X^d$ 均有界: $|X^j|\leq C(j=1,\cdots,d)$, 其中 C 为一常数. 取一列 $\mathbb{R}^d$ 上的多项式 (F_n), 使得 $F_n,D_jF_n,D_{ij}F_n$ 在 $[-C,C]^d$ 上分别一致收敛于 $F,D_jF,D_{ij}F,i,j=1,\cdots,d$. 如果 (3.5) 对每个 F_n 成立, 则由定理 2.9,(3.5) 对 F 也成立. 因此, 只需对 F 为一个 $\mathbb{R}^d$ 上的多项式情形证明 (3.5).

若 $F(x^1,\cdots,x^d)=x^ix^j$,(3.5) 即归结为 (3.1). 由归纳法, 只需证明: 若 (3.5) 对某个多项式 F 成立, 则 (3.5) 对多项式

$$G(x^1,\cdots,x^d)=x^iF(x^1,\cdots,x^d)$$

也成立. 由于

$$\begin{aligned}\eta_s(G)&=G(X_s)-G(X_{s-})-\sum_{j=1}^{d}D_jG(X_{s-})\Delta X_s^j\\&=X_{s-}^i\eta_s(F)+\Delta[X^i,F(X)]_s\end{aligned}$$

且 (X^i_{s-}) 局部有界，故级数 $\sum_{0<s\le t}\eta_s(G)$ 绝对收敛．此外还有

$$\frac{1}{2}A_t(G)=\frac{1}{2}\int_0^t X^i_{s-}dA_s(F)+\sum_{j=1}^d\int_0^t D_jF(X_{s-})d\langle (X^i)^c,(X^j)^c\rangle_s$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^t X^i_{s-}dA_s(F)+\langle (X^i)^c,(F(X))^c\rangle_t-X^i_0F(X_0),$$

$$\sum_{j=1}^d\int_0^t D_jG(X_{s-})dX^j_s=\int_0^t F(X_{s-})dX^i_s+\sum_{j=1}^d\int_0^t X^j_{s-}D_jF(X_{s-})dX^j_s.$$

于是由 (3.1) 及上面两个等式得

$$\begin{aligned}G(X_t)-G(X_0)&=X^i_t(X_t)-X^i_0F(X_0)\\&=\int_0^t X^i_{s-}dF(X_s)+\int_0^t F(X_{s-})dX^i_s+[X^i,F(X)]_t-X^i_0F(X_0)\\&=\sum_{j=1}^d\int_0^t D_jG(X_{s-})dX^j_s+\sum_{0<s\le t}\eta_s(G)+\frac{1}{2}A_t(G),\end{aligned}$$

即 (3.5) 对 G 成立. ∎

作为 Itô 公式的一个重要应用，我们证明半鞅的 Doléans-Dade 指数公式.

定理 3.4 设 X 为一半鞅. 令

$$V_t=\prod_{0<s\le t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}\ (V_0=1),\tag{3.8}$$

则对几乎所有 ω,(3.8) 右边的无穷乘积对一切 t 绝对收敛，且 $V=(V_t)$ 为适应纯断有限变差过程. 令

$$Z_t=\exp\left\{X_t-X_0-\frac{1}{2}\langle X\rangle_t\right\}\prod_{0<s\le t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s},\tag{3.9}$$

则 $Z=(Z_t)$ 满足以下随机积分方程

$$Z_t=1+\int_0^t Z_{s-}dX_s.\tag{3.10}$$

证明 令

$$V_t' = \prod_{0<s\le t} (1 + \Delta X_s I_{[|\Delta X_s|>\frac{1}{2}]} \exp\{-\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|>\frac{1}{2}]}\} ,$$

$$V_t'' = \prod_{0<s\le t} (1 + \Delta X_s I_{[|\Delta X_s|\le\frac{1}{2}]} \exp\{-\Delta X_s I_{[|\Delta X_s|\le\frac{1}{2}]}\} .$$

显然，定义 V_t' 的乘积只是有限项的积．由于

$$e^{-x^2} \le (1+x)e^{-x} \le e^{-\frac{1}{2}x^2} \ , \ |x| \le \frac{1}{2} ;$$

定义 V_t'' 的无穷乘积绝对收敛．因此 (3.8) 中的无穷乘积绝对收敛．显然，(V_t') 及 $(\log V_t'')$ 为适应纯断有限变差过程，故由 Itô 公式，(V_t'') 亦然．由于 $V_t = V_t'V_t''$，仍由 Itô 公式知，V 为适应纯断有限变差过程．

令 $F(x,y) = e^x y, K = X - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c\rangle$，则 $Z = F(K,V)$，$K^c = X^c, \Delta K = \Delta X$．注意到 $Z_s = Z_{s-}(1+\Delta X_s)$，由 Itô 公式得

$$\begin{aligned} Z_t &= 1 + \int_0^t Z_{s-}dK_s + \int_0^t e^{K_{s-}}dV_s + \frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}d\langle K^c\rangle_s \\ &\quad + \sum_{0<s\le t} (\Delta Z_s - Z_{s-}\Delta K_s - e^{K_{s-}}\Delta V_s) \\ &= 1 + \int_0^t Z_{s-}dX_s , \end{aligned}$$

即 Z 满足 (3.10)． ∎

注 实际上，(3.9) 给出的半鞅 (Z_t) 是方程 (3.10) 的唯一解．通常我们用 $\mathcal{E}(X)$ 来记 Z，并称 (3.9) 为半鞅 X 的 Doléans-Dade 指数公式．

下面我们将利用 Itô 公式证明 Brown 运动鞅刻画定理（Lévy 定理)．

定义 3.5 一零初值 d- 维 $\mathbb{F}$- 适应连续过程 $(B_t^1,\cdots,B_t^d)$ 称为 $\mathbb{F}$- Brown 运动(或 Wiener 过程)，如果 $\forall 0\le s<t<\infty, B_t - B_s$

与 $\mathcal{F}_s$ 独立，且 $B_t - B_s$ 服从均值向量为零、协方差阵为 $(t-s)I_d$ 的正态分布，其中 I_d 为 d 阶单位阵.

定理 3.6 设 (B_t) 为一 d 维 $\mathbb{F}$- 适应连续过程. 则为要 (B_t) 为 $\mathbb{F}$- Brown 运动，必须且只需每个 (B_t^i) 关于 $\mathbb{F}$ 为一局部鞅，且 $\langle B^i, B^j\rangle_t = \delta_{ij}t$.

证明 必要性. 设 (B_t) 为 $\mathbb{F}$-Brown 运动. 由于 $B_t^i - B_s^i$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t^i B_t^j - B_s^i B_s^j \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t^i - B_s^i)(B_t^j - B_s^j) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t^i - B_s^i)(B_t^j - B_s^j)] = \delta_{ij}(t-s)\ .\end{aligned}$$

这表明 $B_t^i B_t^j - \delta_{ij}t$ 为零初值鞅，故 $\langle B^i, B^j\rangle_t = \delta_{ij}t$.

充分性. 设 (B_t) 为 d- 维局部鞅，且 $\langle B^i, B^j\rangle_t = \delta_{ij}t$. 设 $u \in \mathbb{R}^d$，令

$$Z_t = \exp\left\{i\sum_{j=1}^d u_j B_t^j + \frac{|u|^2}{2}t\right\},$$

则由 Itô 公式，

$$\begin{aligned}Z_t &= 1 + \frac{|u|^2}{2}\int_0^t Z_s ds + i\sum_{j=1}^d u_j \int_0^t Z_s dB_s^j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^d u_j u_k \int_0^t Z_s d\langle B^j, B^k\rangle_s \\ &= 1 + i\sum_{j=1}^d u_j \int_0^t Z_s dB_s^j\ .\end{aligned}$$

因此 (Z_t) 为一 (复值) 局部鞅. 但 $|Z_t| \le e^{\frac{|u|^2}{2}t}$，故 (Z_t) 为鞅，于是有

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{i\sum_{j=1}^d u_j(B_t^j - B_s^j)\Big\} \mid \mathcal{F}_s\Big] = \exp\Big\{-\frac{|u|^2}{2}(t-s)\Big\}\ .$$

这表明 $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，且 $B_t - B_s$ 服从均值向量为零、协方差阵为 $(t-s)I_d$ 的正态分布，即 (B_t) 为 $\mathbb{F}$-Brown 运动. ∎

§4. 半鞅的局部时

引理 4.1 设 X 为一半鞅，f 为一 $\mathbb{R}$ 上的连续凸函数，f' 为其左导数，则 $f(X)$ 为半鞅，且有

$$
\begin{aligned}
f(X_t) = f(X_0) &+ \int_0^t f'(X_{s-})dX_s \\
&+ \sum_{0<s\le t} [f(X_s - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s] + C_t,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

其中 (C_t) 为一零初值连续适应增过程.

证明 取一非负函数 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, 使其支撑为 $[-a,0]$ $(a>0)$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)ds = 1$. 令

$$
f_n(t) = n\int_{-\infty}^{\infty} f(t+s)\varphi(ns)ds = \int_{-\infty}^{0} f\left(t+\frac{s}{n}\right)\varphi(s)ds\ ,
$$

则 $f_n(t)$ 为凸函数，$f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, 且当 $n\to\infty$ 时有 $f_n(t)\to f(t)$. 由于 $f'(t)$ 为左连续单调增函数，我们有

$$
f_n'(t) = \int_{-a}^{0} f'\left(t+\frac{s}{n}\right)\varphi(s)ds \uparrow f'(t)\,.
$$

由 Itô 公式得

$$
f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_0^t f_n'(X_{s-})dX_s + B_s^{(n)}, \tag{4.2}
$$

其中

$$
B_t^{(n)} = \sum_{0<s\le t}[f_n(X_s) - f_n(X_{s-}) - f_n'(X_{s-})\Delta X_s] + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X_{s-})d\langle X^c\rangle_s
$$

为适应增过程 (因 f_n 为凸函数).

为证 (4.1), 不妨设 $X_- I_{]0,\infty[}$ 有界, 否则可讨论 X^{T_n}, 其中 $T_n = \inf\{t \geq 0 : |X_t| > n\}$. 由于 f' 在任一有穷区间上有界, 故由定理 2.8 知, 在 (4.2) 中令 $n \to \infty$ 得

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + B_t,$$

其中 $B_t = I\!P\text{-}\lim_n B_t^{(n)}, B = (B_t)$ 为一零初值适应增过程. 令 C 为 B 的连续部分, 则得 (4.1). ∎

定理 4.2 设 X 为一半鞅, $a > 0$, 则

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t I_{[X_{s-} > a]} dX_s$$
$$+ \sum_{0<s\leq t} [I_{[X_{s-}>a]}(X_s - a)^- + I_{[X_{s-}\leq a]}(X_s - a)^+] + \frac{1}{2}L_t^a(X), \tag{4.3}$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t I_{[X_{s-} \leq a]} dX_s$$
$$+ \sum_{0<s\leq t} [I_{[X_{s-}>a]}(X_s - a)^- + I_{[X_{s-}\leq a]}(X_s - a)^+] + \frac{1}{2}L_t^a(X), \tag{4.4}$$

其中 $L_t^a(X)$ 为零初值适应连续增过程，称为 X 在 a 点的局部时. (4.3) 及 (4.4) 称为 Tanaka-Meyer 公式.

证明 令 $f(x) = (x - a)^+$, 则 f 为凸函数, $f'(x) = I_{]a,\infty[}(x)$. 由 (4.1) 易证 (4.2)(这里用 $L_t^a(X)$ 表示 $2C_t$). 由于

$$(X_t - a)^- = (X_t - a)^+ - (X_0 - a) - \int_0^t dX_s,$$

(4.4) 由 (4.3) 推得. ∎

下一定理用局部时给出了 (4.1) 中 (C_t) 的一个表达式, 从而得到 Itô 公式的一个推广 (证明见 [HWY]).

定理 4.3 设 X 为一半鞅, f 为一 $I\!R$ 上的连续凸函数, f' 为其左导数, ρ 为 f 在广义函数意义下的二阶导数 (即 $\rho(da)$ 为一

Radon 测度). 则

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + \sum_{0<s\le t}[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s] + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a(X)\rho(da) . \tag{4.5}$$

系 4.4 设 X 为一半鞅, g 为一非负或有界的 Borel 函数, 则

$$\int_0^t g(X_t)d\langle X^c\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} L_t^a(X)g(a)da. \tag{4.6}$$

证明 令 $f \in C^2(\mathbb{R})$. 将 (4.5) 与 Itô 公式作比较得

$$\int_0^t f''(X_s)d\langle X^c\rangle_s = \int_0^t f''(X_{s-})d\langle X^c\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} L_t^a(X)f''(a)da. \tag{4.7}$$

由单调类定理可从 (4.7) 推得 (4.6) ∎

§ 5. Girsanov 定理

设 $\mathbb{Q}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ 上一概率测度. 如果 $\forall t \in \mathbb{R}_+ \mathbb{Q}$ 限于 $\mathcal{F}_t$ 关于 $\mathbb{P}$ 绝对连续, 则记为 $\mathbb{Q} \ll_{\text{loc}} \mathbb{P}$, 并令 $M_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t}$ (若在 $\mathcal{F}_\infty$ 上有 $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, 则 $M_t = \mathbb{E}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t]$). 由第二章定理 4.11 知, 鞅 (M_t) 有右连左极修正, 以下总考虑这一修正.

本节内容参考了 [RY] 和 [Y1].

引理 5.1 设 $\mathbb{Q} \ll_{\text{loc}} \mathbb{P}$. 则对一切停时 T, 在 $\mathcal{F}_T \cap [T < \infty]$ 有 $d\mathbb{Q} = M_T I_{[T\infty]} d\mathbb{P}$. 此外, 对一切有界停时 T, M^T 为一致可积鞅.

证明 设 $t>0, A\in\mathcal{F}_T$, 则 $A\cap[T\le t]\in\mathcal{F}_{T\wedge t}\subset\mathcal{F}_t$. 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(A\cap[T\le t])&=\int_{A\cap[T\le t]}M_t d\mathbb{P}=\int_{A\cap[T\le t]}\mathbb{E}[M_t\mid\mathcal{F}_{T\wedge t}]d\mathbb{P}\\&=\int_{A\cap[T\le t]}M_{T\wedge t}d\mathbb{P}=\int_{A\cap[T\le t]}M_T I_{[T<\infty]}d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

令 $t\to\infty$ 即得引理的第一个结论.

现设 T 为一有穷停时, 则 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$\mathbb{E}[M_T\mid\mathcal{F}_t]=\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[M_T\mid\mathcal{F}_T]\mid\mathcal{F}_t\big]=\mathbb{E}[M_T\mid\mathcal{F}_{T\wedge t}].$$

另一方面, 对 $\forall A\in\mathcal{F}_{T\wedge t}$, 由上所证有

$$\mathbb{E}[M_{T\wedge t}I_A]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[I_A]=\mathbb{E}[M_T I_A],$$

即有 $\mathbb{E}[M_T\mid\mathcal{F}_{T\wedge t}]=M_{T\wedge t}$. 于是最终有 $\mathbb{E}[M_T\mid\mathcal{F}_t]=M_{T\wedge t}$. 这表明 M^T 为一致可积鞅. ∎

引理 5.2 设 $\mathbb{Q}\ll_{\text{loc}}\mathbb{P}$. 则在 $\mathbb{Q}$ 下 M 的几乎所有轨道为严格正函数.

证明 令 $T(\omega)=\inf\{t: M_t(\omega)=0\}$, 则 $M_T I_{[T<\infty]}=0$. 由引理 5.1 知, $\forall t\in\mathbb{R}_+, \mathbb{Q}(T\le t)=0$. 从而 $\mathbb{Q}(T=+\infty)=1$. ∎

引理 5.3 设 $\mathbb{Q}\ll_{\text{loc}}\mathbb{P}$, (X_t) 为一 $(\mathcal{F}_t)$ 适应的右连左极过程, T 为一有穷停时. 则为要 $(MX)^T$ 为 $\mathbb{P}$- 一致可积鞅, 必须且只需 X^T 为 $\mathbb{Q}$- 一致可积鞅.

证明 我们只证必要性, 充分性的证明类似. 设 $(X)^T$ 为 $\mathbb{P}$- 一致可积鞅. 令 $t\in\mathbb{R}_+, A\in\mathcal{F}_{T\wedge t}$. 由引理 5.1 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T I_A]&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_T M_T I_A]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_{T\wedge t}M_{T\wedge t}I_A]\\&=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_{T\wedge t}I_A],\end{aligned}$$

这表明 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T|\mathcal{F}_{T\wedge t}]=X_{T\wedge t}, \mathbb{Q}$- a.s.. 另一方面, 恒有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T\mid\mathcal{F}_t]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T\mid\mathcal{F}_T]\mid\mathcal{F}_t\big]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T\mid\mathcal{F}_{T\wedge t}],$$

故有 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T|\mathcal{F}_t]=X_{T\wedge t}$, 即 X^T 为$\mathbb{Q}$- 一致可积鞅. ∎

下一引理是概率改变下局部鞅变换的基本引理.

引理 5.4 设$\mathbb{Q}\ll_{\text{loc}}\mathbb{P}$, (X_t) 为一 $(\mathcal{F}_t)$ 适应右连左极过程. 为要 (X_t) 为$\mathbb{Q}$- 局部鞅, 必须且只需存在一列有穷停时 $T_n\uparrow+\infty$, $\mathbb{Q}$-a.s., 使得 $(MX)^{T_n}$ 为 $\mathbb{P}$- 局部鞅. 特别, 如果$\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{P}$ 在 $\mathcal{F}_\infty$ 上等价, 则 X 为$\mathbb{Q}$- 局部鞅, 当且仅当 MX 为 $\mathbb{P}$- 局部鞅.

证明 必要性直接由引理 5.3 推得. 往证充分性. 无妨设 $X_0=0$. 假定存在有穷停时 $T_n\uparrow+\infty$,$\mathbb{Q}$-a.s., 使得每个 $(MX)^{T_n}$ 为 $\mathbb{P}$- 局部鞅. 对每个 n, 取一列有穷停时 $S_m^{(n)}\uparrow+\infty$, $\mathbb{P}$-a.s.$(m\to\infty)$, 使得每个 $(MX)^{T_n\wedge S^{(n)}_m}$ 为 $\mathbb{P}$- 一致可积鞅. 则由引理 5.3, $X^{T_n\wedge S_m^{(n)}}$ 为$\mathbb{Q}$- 一致可积鞅. 由于对一切 $t\in\mathbb{R}_+$,

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{Q}(S_m^{(n)}\leq t)=\lim_{m\to\infty}\int_{[S_m^{(n)}\leq t]}M_t d\mathbb{P}=0,$$

故 $S_m^{(n)}\uparrow+\infty$,$\mathbb{Q}$-a.s.$(m\to\infty)$. 因此, X^{T_n} 为$\mathbb{Q}$- 局部鞅, 从而 X 为$\mathbb{Q}$- 局部鞅. ∎

注 令 $T=\inf\{t:M_t=0\}$, $Z=M^{-1}I_{[\![0,T[\![}$, 则 Z 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅. 事实上, 令 $T_n=\inf\{t:M_t\leq\frac{1}{n}\}\wedge n$, 则 $T_n\uparrow+\infty$, $\mathbb{Q}$-a.s.,$(ZM)^{T_n}=1$.

下一定理表明, 在概率改变下半鞅性保持不变.

定理 5.5 设$\mathbb{Q}\ll_{\text{loc}}\mathbb{P}$, X 为一 P- 半鞅, 则 X 为$\mathbb{Q}$- 半鞅, 且在 $\mathbb{Q}$ 下 X 的二次变差过程 $[X](\mathbb{Q})$ 与在 $\mathbb{P}$ 下 X 的二次变差过程 $[X](\mathbb{P})$ $\mathbb{Q}$- 无区别.

证明 令 $T=\inf\{t:M_t=0\}$, $T_n=\inf\{t:M_t\leq\frac{1}{n}\}\wedge n$, 则 $T_n\uparrow T$,$\mathbb{Q}([T=\infty])=1$. 令 $Z=M^{-1}I_{[\![0,T[\![}$, 则由引理 5.4 下面的注知 Z 为$\mathbb{Q}$- 局部鞅, 此外有 $ZM=I_{[\![0,T[\![}$. 由于 XM 为 P- 半鞅, 可令 $XM=N+B$, 其中 N 为 P- 局部鞅, B 为适应有限变差过程. 由于 $(NZM)^{T_n}=N^{T_n}$ 为 P- 局部鞅, 故由引理 5.4 知, NZ 为$\mathbb{Q}$- 局部鞅. 此外, 作为两个$\mathbb{Q}$- 半鞅 Z 与 B 的乘积, ZB 为$\mathbb{Q}$- 半鞅, 因此, XMZ 为$\mathbb{Q}$- 半鞅, 即 $XI_{[\![0,T[\![}$ 为$\mathbb{Q}$- 半鞅. 但

$\mathbb{Q}(T=+\infty)=1$, 故 X 为 $\mathbb{Q}$- 半鞅. 由于 $\mathbb{Q}\ll_{\text{loc}}\mathbb{P}$, 由定理 3.2 下面的注知, $[X]_t(\mathbb{Q})=[X]_t(\mathbb{P})\,\mathbb{Q}$-a.s., 从而 $[X](\mathbb{Q})$ 与 $[X](\mathbb{P})$ $\mathbb{Q}$- 无区别. ∎

下一定理称为 Girsanov 定理.

定理 5.6 设 $\mathbb{Q}\ll_{\text{loc}}\mathbb{P}$, X 为一 P- 局部鞅. 令

$$T(\omega)=\inf\{t:M_t(\omega)=0\}\,,\ U=\Delta X_T I_{[\![T,\infty[\![}.$$

在 $\mathbb{Q}$ 下定义

$$Y_t=X_t-\int_0^t M_s^{-1}d[X,M]_s+\widetilde{U}_t\,,\qquad t\geq 0\,,\tag{5.1}$$

其中 $\widetilde{U}$ 为 U 在 $\mathbb{P}$ 下的可料对偶投影, 则 Y 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅.

证明 令

$$T_n=\inf\{t:M_t\leq\frac{1}{n}\}\wedge n,$$

由于在 $[\![0,T_n[\![$ 上 $M>\dfrac{1}{n}$, 故可定义如下过程:

$$B_t^{(n)}=\int_0^{t\wedge T_n}M_s^{-1}I_{[M_s>0]}d[X,M]_s=\int_0^t M_s^{-1}I_{[M_s>0]}d[X^{T_n},M]_s.$$

令 $Y^{(n)}=X^{T_n}-B^{(n)}+\widetilde{U}^{T_n}$. 往证 $Y^{(n)}$ 为 $\mathbb{Q}$- 局部鞅.

下面我们用 $A\sim B$ 表示 $A-B$ 为 P- 局部鞅. 由分部积分公式及定理 3.1 得

$$\begin{aligned}MB^{(n)}&=B_-^{(n)}.M+M.B^{(n)}\sim M.B^{(n)}\\&=\int_0^{\cdot}I_{[M_s>0]}d[M,X^{T_n}]_s=[M,X^{T_n}]^{T-},\\M\widetilde{U}^{T_n}&\sim M_-.\widetilde{U}^{T_n}\sim M_-.U^{T_n}.\end{aligned}$$

于是有 (注意 $MX^{T_n}\sim[M,X^{T_n}]$, $M_T I_{[T<\infty]}=0$)

$$MY^{(n)}\sim\Delta M_T\Delta X_T^{T_n}I_{[\![T,\infty[\![}+M_{T-}\Delta X_T I_{[T=T_n]}I_{[\![T,\infty[\![}=0.$$

这表明 $MY^{(n)}$ 为 P- 局部鞅，从而 $(MY^{(n)})^{T_n}$ 为 P- 局部鞅．由于 $T_n\uparrow+\infty Q$-a.s., 故由引理 5.4 知 $Y^{(n)}$ 为 Q- 局部鞅．但 Y^{T_n} 与 $Y^{(n)}$ 在 Q 下无区别，故 Y 为 Q- 局部鞅． ∎

系 5.7 设 $Q\ll_{\text{loc}}\mathbb{P},(X_t)$ 为一连续 P- 局部鞅．如果存在一 P- 局部鞅 L, 使得 $M=\mathcal{E}(L)$, 则

$$Y_t=X_t-[X,L]_t \tag{5.2}$$

为 Q- 局部鞅．

证明 由于 X 连续，我们有

$$\begin{aligned}[X,M]=[X\mathcal{E}(L)]&=\mathcal{E}(L)_-.[X,L]\\&=\mathcal{E}(L).[X,L]=M.[X,L].\end{aligned}$$

于是 (5.1) 和 (5.2) 右边定义的过程在 Q 下无区别． ∎

例(Girsanov 定理的经典形式) 设 $(B_t,0\le t\le T)$ 为 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 运动，(H_t) 为一适应可测过程，使得 $\int_0^T H_s^2ds<\infty$, a.s.. 对 $0\le t\le T$, 令

$$M_t=\exp\{\int_0^t H_sdB_s-\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2ds\},$$

$$B_t'=B_t-\int_0^t H_sds.$$

如果 $\mathbb{E}[M_T]=1$, 令 $d\mathbb{Q}=M_Td\mathbb{P}$, 则在 Q 下，过程 $(B_t',0\le t\le T)$ 为 $(\mathcal{F}_t)$- Brown 运动．

事实上，令 $L_t=\int_0^t H_sdB_s$, 则 $\mathcal{E}(L)=M$. 故由系 5.7 知，在 Q 下，(B_t') 为 $(\mathcal{F}_t)$- 局部鞅，但 $[B']_t(\mathbb{Q})=[B]_t(\mathbb{Q})=t$, 故由 Lévy 定理 (定理 3.6) 知 (B_t') 在 Q 下为 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 运动．

注 1 若 $\mathbb{E}[\exp\{\frac{1}{2}\int_0^T H_s^2ds\}]<\infty$, 则由 Novikov 定理知 (参见 [Y1]),$\mathbb{E}[M_T]=1$(即 $(M_t,0\le t\le T)$ 为一鞅)．

注 2 设 (H_t) 为一适应可测过程，使得 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^t H_s^2ds<\infty$ a.s.，且使 (M_t) 为一鞅．令 $d\mathbb{Q}_t=M_td\mathbb{P}$, 则可证明：存在 $(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$

上唯一概率测度$\mathbb{Q}$, 使得$\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}=\mathbb{Q}_t, \forall t\in \mathbb{R}_+$(参见 [RY]). 于是 (B_t') 在$\mathbb{Q}$ 下为 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 运动.

§ 6. Brown 局部鞅的随机积分表示

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(\mathcal{F}_t))$ 为一带流的概率空间. (M_t) 关于 (F_t) 为一局部鞅, 如果对任一 $(\mathcal{F}_t)$- 局部鞅 (N_t), 存在一 $(\mathcal{F}_t)$- 可料过程 (H_t), 使得 N 有如下随机积分表示:

$$N_t=N_0+\int_0^t H_s dM_s\,,$$

则称 (M_t) 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 有可料表示性. 关于局部鞅的可料表示性的一般性讨论可参见 [HWY] 或 [Y1]. 这里只介绍 Brown 运动关于它的自然 σ- 域流的可料表示性. 本节内容基本参考了 [RY].

设 (B_t) 为一完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 Brown 运动, 即 (B_t) 为一轨道连续的独立增量过程, 且 $B_0=0, B_t-B_s$ 服从均值为零方差为 $t-s$ 的正态分布. 令 $\mathcal{F}_t^0=\sigma(B_s,s\le t)$, 并令 $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t^0\vee\mathcal{N}$, 其中 $\mathcal{N}$ 为由所有 P- 零概集生成的 σ- 域. 称 (F_t) 为 Brown 运动 (B_t) 的自然 σ- 域流. 由下一引理可以证明 $(\mathcal{F}_t)$ 是右连续的, 即 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有 $\mathcal{F}_{t+}=\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t-}$(参见 [HWY] 或 [Y1]).

引理 6.1 令 $\mathcal{H}$ 表示 $\mathbb{R}_+$ 上有紧支撑的阶梯函数全体, 即 $\mathcal{H}$ 中的元素有如下形式:

$$f=\sum_{j=1}^n \lambda_j I_{[t_{j-1},t_j]},\tag{6.1}$$

其中 $n\ge 1,\lambda_j\in\mathbb{R}, 1\le j\le n, 0=t_0<t_1<\cdots<t_n$. 令

$$\mathcal{E}_f=\exp\Big\{\sum_{j=1}^n\lambda_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\lambda_j^2(t_j-t_{j-1})\Big\},\tag{6.2}$$

则由 $\{\mathcal{E}_f: f\in\mathcal{H}\}$ 张成的线性空间在 $L^2(\mathcal{F}_\infty,\mathbb{P})$ 中稠.

证明 令 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n, Y \in L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$. 定义

$$\varphi(z_1, \cdots, z_n) = \mathbb{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{j=1}^{n} z_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big\}Y\Big], z_j \in \mathbb{C}, 1 \le j \le n,$$

易知 φ 为 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数. 如果 Y 与 $\{\mathcal{E}_f : f \in \mathcal{H}\}$ 正交, 则 φ 限于 $\mathbb{R}^n$ 为零, 从而 φ 在 $\mathbb{C}^n$ 上恒为零. 特别有

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{i\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big\}Y\Big] = 0.$$

由于 $\lambda_j \in \mathbb{R}, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ 是任意的, 故必须有 $Y = 0$ a.s.. 引理证毕. ∎

引理 6.2 设 $\xi \in L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$. 则存在一 $(\mathcal{F}_t)$- 可料过程 H, 使得 $\mathbb{E}[\int_0^\infty H_s^2 ds] < \infty$, 且

$$\xi = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^\infty H_s dB_s. \tag{6.3}$$

证明 令 $\mathcal{G}$ 表示 $L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ 中使引理结论成立的 ξ 全体. 令 $\mathcal{L}^2$ 表示满足 $\|H\|^2 = \mathbb{E}[\int_0^\infty H_s^2 ds] < \infty$ 的可料过程全体. 则 $\mathcal{L}^2$ 按范数 $\|\cdot\|$ 为一 Hilbert 空间. 事实上, 令

$$\mu(\Gamma) = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty I_\Gamma(\omega, s) ds\Big], \Gamma \in \mathcal{P},$$

则 μ 为可料 σ- 域 $\mathcal{P}$ 上的一 σ- 有限测度. 我们有 $\mathcal{L}^2 = L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, \mu)$. 由于

$$\mathbb{E}[\xi^2] = (\mathbb{E}[\xi])^2 + \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty H_s^2 ds\Big],$$

故 $\mathcal{G}_0 = \{\xi \in \mathcal{G} : \mathbb{E}(\xi) = 0\}$ 与 $\mathcal{L}^2$ 保范同构, 从而 $\mathcal{G}$ 为 $L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ 的闭子空间. 另一方面, 由 (3.10) 知 $\{\mathcal{E}_f : f \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{G}$, 故由引理 6.1 知 $\mathcal{G} = L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$. ∎

定理 6.3 Brown 运动 (B_t) 关于它的自然 σ- 域流 $(\mathcal{F}_t)$ 有可料表示性. 特别, 一切 $(\mathcal{F}_t)$- 局部鞅的几乎所有轨道是连续的.

证明 设 M 为一右连续平方可积鞅, 则存在 $H \in \mathcal{L}^2$ 使得

$$M_\infty = M_0 + \int_0^\infty H_s dB,$$

于是 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s \quad \text{a.s.}.$$

由于上式右端是连续过程, 左端是右连续过程, 故两者无区别. 从而 M 本身是连续平方可积鞅.

现设 M 为右连续一致可积鞅. 由于 $L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ 在 $L^1(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ 中稠, 可以选取一列连续平方可积鞅 $M^{(n)}$, 使得

$$\sum_{n=1}^\infty 2^n \mathbb{E}[|M_\infty - M_\infty^{(n)}|] < \infty.$$

由鞅的极大值不等式 (第一章定理 4.5) 得

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}[\sup_t |M_t - M_t^{(n)}| > 2^{-n}] \le \sum_{n=1}^\infty 2^n \mathbb{E}[|M_\infty - M_\infty^{(n)}|] < \infty,$$

故由 Borel-Cantelli 引理知: $M^{(n)}$ 的几乎所有轨道在 $\mathbb{R}_+$ 上一致收敛于 M 的轨道. 从而 M 是连续一致可积鞅. 于是, 一切 $(\mathcal{F}_t)$-局部鞅 (局部鞅总假定轨道右连左极) 是连续的. 设 M 为一 $(\mathcal{F}_t)$-局部鞅. 由于 $\mathcal{F}_0$ 是平凡的 σ- 域 (即 $A \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow P(A) = 0$ 或 1), 故 M_0 a.s. 为常数. 令

$$T_n = \inf\{t : |M_t| \ge n\}.$$

则 M^{T_n} 为有界鞅. 故存在 $H^{(n)} \in \mathcal{L}^2$, 使得

$$M_t^{T_n} = M_0 + \int_0^t H_s^{(n)} dB_s.$$

令 $H=\sum_{n=0}^{\infty} H^{(n)} I_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]}$, 则有

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s. \qquad \blacksquare$$

注 1 上述结果对 d- 维 Brown 运动情形也成立，证明类似.

注 2 设 $(\mathcal{F}_t)$ 为 Brown 运动 (B_t) 的自然 σ- 域流. 则可证明一切 $(\mathcal{F}_t)$ 停时为可料时，从而一切 $(\mathcal{F}_t)$ 可选过程为可料过程.

参 考 文 献

[HWY] 何声武、汪嘉冈、严加安， 半鞅与随机分析，科学出版社， 1995.

[RY] D. Revuz and M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer, 1991.

[Y1] 严加安， 鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社， 1981.

[Y2] 严加安， 测度与积分，陕西师范大学出版社， 1988.

第二篇 倒向随机微分方程
——随机优化理论与 HJB 方程的粘性解——

§1. 引 言

为介绍倒向随机微分方程，最好对照一下经典的即正向的随机微分方程. 正向微分方程的研究已有近半个世纪的历史，取得了辉煌的成果. 它既有完善的理论框架，又有直接的应用背景，并且与其他数学分支如测度论、偏微分方程、微分几何、势论等建立了自然的而且非常深刻的联系，互相促进，相映生辉. 许多著名的数学家都为之吸引，在这一领域作出了杰出的贡献，其结果又反过来促进了其他学科的发展. 近期的一个典型的例子就是上届 Fields 奖获得者 P. L. Lions 等提出的非线性二阶偏微分方程的粘性解理论，其直接动力就是来源于他在随机微分方程和随机最优控制理论的研究.

与这一进展形成鲜明对照的是，关于倒向随机微分方程的研究只是在最近才刚刚开始：线性情况开始于 1978(参见 [Bi])，而一般非线性情况的基本框架是 1990 在 [PP1] 中给出并证明其解的存在唯一性的. 非常巧合的是，著名经济学家 Duffie 和 Epstein 也独立地从经济学的背景出发于 1992 在 [DE] 中提出了这一方程的一个特别典型的情况.

倒向随机微分方程的研究之所以大大滞后于正向随机微分方程，现在回过头来分析应不外乎以下两个原因：首先，正向随机微

分方程与倒向随机微分方程即使在结构上也有本质的区别，从而很难从正向随机微分方程出发猜想到倒向随机微分方程的形式．其次，从应用的角度讲，正向随机微分方程考虑的是如何认识一个客观存在的随机过程，而倒向随机微分方程则主要关心在有随机干扰的环境中如何使一个系统达到预期的目标．从认识论的观点来看这样一个先后顺序也是自然的．倒向随机微分方程的理论研究的历史虽然很短但进展却很迅速，除了因为其理论本身所特有的系统而有趣的性质之外，还因为发现了重要的应用前景：Duffie 和 Epstein [DE] 发现可以用它来描述不确定经济环境下的消费偏好 (即效用函数理论，这是计量经济学的基础)；作者在 [P5] 中通过倒向随机微分方程获得了非线性 Feynman-Kac 公式，从而可以用来处理诸如反应扩散方程和 Navier-Stokes 方程等众所周知的重要非线性偏微分方程组； El Karoui 和 Quenez [EQ] 发现金融市场的许多重要的衍生证券 (如期权期货等) 的理论价格可以用倒向随机微分方程解出．

倒向随机微分方程引入了一种全新的方程结构．为了便于理解这一新理论，我们打算在进入技术细节的讨论之前先看一下众所周知的常微分方程．考虑以下两个定义于区间 $[0,T]$ 上的常微分方程：

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = & b(X(t)), \quad 0 \le t \le T, \\ X(0) = & x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = & g(Y(t)), \quad 0 \le t \le T, \\ Y(T) = & y_T. \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $b(\cdot), g(\cdot)$ 是给定的函数， x_0, y_T 是给定的数据．方程 (1.1) 的定解条件在初始时刻 $t=0$ 给出，称它为正向常微分方程． (1.2) 的定解条件在终了时刻 $t=T$ 给出，称它为倒向常微分方程．在数学上， (1.1) 和 (1.2) 的处理方法基本上是相同的：例如，在一定的条件下 (如 Lipschitz 条件下)，这两个方程都有唯一的解．但从应用的角度，这两个方程有显著的区别．事实上， (1.1) 的存在唯一性是说只要知道了系统的初始状态 x_0 就可以确定地计算出

系统在将来任一时刻 $t\in[0,T]$ 的状态. 与之相反, (1.2) 的存在唯一性则意味着我们能够计算出应该具备怎样的起点才能使系统达到预定的目标.

以上的两个模型 (1.1) 和 (1.2) 实际上都假定了系统是不受随机干扰, 即确定性系统. 对于非确定性系统或随机系统, 两者之间的差别就不止是在应用的意义上了, 连方程的数学结构都发生了实质性的差别. 首先, 正向常微分方程将被更一般的 (正向) 随机微分方程所取代:

$$\begin{cases} dX(t) = & b(X(t))dt + \sigma(X(t))dW_t, \\ X(0) = & x_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $W(t)$ 是 d- 维布朗运动, 代表了 d 个互相独立的干扰源. 一个典型的例子就是股票的价格: t 时刻的第 i 种股票的价格可以用 $X(t)$ 的第 i 个分量来描述 (后面将详细介绍). 我们可以这样来直观地解释 (1.3) 的解 $X(t)$: 在现在时刻 $t=0$ 系统从给定的初始状态 x_0 出发, 按照 (1.3) 给出的规律运动, 它在未来时刻 T 的状态 $X(T)$ 是一个随机变量. 在现在时刻 $t=0$ 我们是无法确定出 $X(T)$ 的值的. 只有当随着时间的变化 T 变为 "现在时刻" 时我们才能观察到 $X(T)$ 的精确值 (股票的价格是一个很好的例子). 具有上述特点的随机过程被称为适应过程 (后面将详细定义). 适应性是随机分析理论中的一个非常重要的基础概念.

我们立刻体会到, 这一适应性的要求使得随机微分方程 (1.3) 解的存在唯一性变得与 (1.1) 非常不同了: 在有随机干扰的情况下的存在唯一性并不意味着可以通过现在的初始状态精确地预测出未来时刻 T 的状态！它实际上是一种统计意义上的存在唯一性.

以下我们转而考虑常微分方程 (1.2) 在不确定情况下的推广, 即倒向随机微分方程. 我们仍然要求方程的解是适应的. 应该注意到这一要求是非平凡的: 它意味着我们能够通过将来 T 给定的一个 (一般可以是随机的) 目标确切地计算出现在时刻的 "起点". 提出这一要求乍一看起来似乎不现实. 为了更好地理解, 下面我

们举一个离散时间情况下的非常简单的例子，它在金融数学中是非常典型的.

我们将模型充分化简. 设在一证券市场中只流通两种证券：一种债券和一种股票. 债券是无风险的：今天买 1 元的债券明天连本带利可获 1.2 元. 而股票是有风险的：今天买 1 元的股票，而明天是否获利就要看运气. 若是“好运天”，它能值 1.4 元. 但若是“坏运天”则它只值 1 元. 设想有一个投资者为明天制定了一个“财政目标”：

$$若是“好运天”，要获 a 元；若是“坏运天”，要获 b 元. \tag{1.4}$$

问题是：他今天要投入多少元才能实现这一财政目标？

这是一个初等代数问题：设他今天要投入 y 元，其中用 z 元买股票 (从而用 $y-z$ 元买债券). 则 (1.4) 等价于下列代数关系

$$\begin{cases} 1.2y + 0.2z &= a, \\ 1.2y - 0.2z &= b. \end{cases} \tag{1.5}$$

显然这一方程组有唯一的解：

$$y = \frac{5}{12}(a+b), \qquad z = \frac{5}{2}(a-b). \tag{1.6}$$

这里要强调一下解的存在唯一性的意义：投资者要想达到明天的财政计划，那么他今天的决策必须包括 (y,z) 两部分. 他不仅要决定今天的总投入 y，而且还必须将其中的 z 元 (即风险部分) 用来买股票，经济术语为投资组合 (portfolio).

上述例子虽简单，但它深刻地反映了倒向随机微分方程所要处理的问题的实质. 这个投资者今天无法预知他明天的收益. 这还是一个随机变量，要等明天到来时才能知道. 但尽管如此，这个投资者仍旧可以确切地计算出他今天应如何去做才能达到明天的不确定收益. (注意到这里处理的虽然是“不确定收益”问题，实际上，“确定收益问题”只是它的特殊情况，即 $a=b$. 有趣的

是，此时风险部分投资为零．这一现象在倒向随机微分方程中也出现．)

上述例子所处理的问题很有代表性．大量的投资决策以及很多工程决策中都会遇到类似的问题．我们特别强调上述例子所算出的解，即投资决策的结构：投资者不仅需要投入 y 元，并且还必须将其中的 z 元买股票才能达到既定的财政目标．这一点向我们提示了我们要引入的倒向随机微分方程将与正向随机微分方程及正向或倒向常微分方程在结构上的本质差别．因为我们不仅要确定今天的总投入，还必须同时确定其中的风险投资．

[PP1] 中提出的倒向随机微分方程 (以下简称 BSDE) 正好适用于处理这一类问题，它的典型结构是

$$\begin{cases} -dY(t) = & g(Y(t), Z(t), t)dt - Z(t)dW(t), \\ \quad Y(T) = & \xi. \end{cases} \tag{1.7}$$

这里 ξ 是一个给定的 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量 (一个粗略的说法是：它是只有到 T 时刻才能确定的量)．$(Y(t), Z(t))$ 是两个要同时求解的过程．与前面的例子的一个恰当的类比是： 0 时刻代表今天，T 时刻代表明天， $Y(0)$ 对应 $y, Z(0)$ 对应 z.

[PP1] 的主要结果是关于 (1.7) 的解的存在唯一性定理．粗略地说，只要 g 和 ξ 满足适当的条件，则存在唯一的一对随机过程 $(Y(\cdot), Z(\cdot))$ 满足 BSDE (1.7)．特别地，当 $t = 0$ 时， $(Y(0), Z(0))$ 就唯一地被确定．这就给出了为达到明天的目标而今天 (以及今后每一步) 需要做出的决策．我们看到：倒向随机微分方程 (1.7) 在结构上与正向随机微分方程 (1.3) 及倒向常微分方程 (1.2) 的显著差别．这一点也许是倒向随机方程的研究起步晚的另一个原因．我们再回过头来看一下方程组 (1.5) 的解 (1.6)．它反映了金融学里的一个典型的现象：如果投资者明天的目标是非负的 $a \geq 0, b \geq 0$(即他一定不会赔钱)，并且 $a + b > 0$ (即他有获益的可能性)，则他今天的投入 y 必须是正的．这一点在金融数学中被称为满足无套利 (no-arbitrage) 条件．关于这一点在倒向随机微分方程中也有对应

的结果，称为比较定理．大家知道，正向随机微分方程是正向常微分方程的一个自然的推广：当 $\sigma\equiv 0$ 时 (1.3) 就退化为 (1.1) 了．读者自然会问：如何将倒向随机微分方程 (1.7) 看作是倒向常微分方程 (1.2) 的推广呢？答案是：当 g 和 ξ 都不具有随机性时，方程 (1.7) 的解就退化为 $(Y(t)\equiv y(t), Z(t)\equiv 0)$，其中 $y(\cdot)$ 是一个确定性的过程 (从而是适应的)，它满足下面的常微分方程

$$
\begin{aligned}
-\dot{y}(t) &= g(y(t),0,t),\\
y(T) &= \xi,
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

从而 (1.7) 退化为 (1.2) 的形式．这一点是方程 (1.7) 的存在唯一性 (见定理 2.1) 的一个简单推论．

综上所述：正向随机微分方程的解将今天的确定状态 (初始条件) 变为明天的一般是不确定的状态，以研究其统计规律，而倒向随机微分方程的解将明天的 (一般可以是不确定的) 目标变为今天的确定状态，以制定今天的决策．

本篇将介绍倒向随机微分方程在以下几个方面的进展情况及其在随机优化问题中的应用：在下一节将讨论解的存在唯一性定理，第 3 节介绍比较定理．它们是这一理论的基础．从第 4 节开始我们用 4 节篇幅介绍非线性 Feynman-Kac 公式和 Bellman 动态规划，并由此证明一类推广的 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程的粘性解的存在性．这样也顺便完成了一维情况下的非线性 Feynman-Kac 公式的证明．这几节里所涉及的处理技术在 BSDE 及相应的 (金融数学中的) 随机优化中是非常典型的．而大部分结论是近几年才获得的．我们对推广 HJB 方程这一类的全非线性二阶椭圆性偏微分方程的讨论采用了随机的技术，不假设读者具备偏微分方程的基础．在第 8 节介绍从倒向随机微分方程的解引出的一种推广了的数学期望 ——g- 期望概念．

§ 2. 倒向随机微分方程

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$为一个装备了 σ- 代数流 $(\mathcal{F}_t)$的概率空间, $(W_t)_{t\geq 0}$ 是其上的一个 d- 维标准 Brown 运动. 我们设 $(\mathcal{F}_t)$ 是 (W_t) 的自然 σ- 代数流:

$$\mathcal{F}_t=\sigma\Big\{\mathcal{N},\ \sigma\{W_s;0\leq s\leq t\}\Big\},$$

其中 $\mathcal{N}$ 是 $\sigma\{W_s;0\leq s<\infty\}$ 的 P- 零测集全体. 一个向量值随机过程 $X_t=X(\omega,t)$ 称为 $\mathcal{F}_t$- 适应的 ($(\mathcal{F}_t)$ -adapted), 如果对于每一个 $t\in[0,\infty)$, $(X_t(\cdot))$ 是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 可测的随机变量. 直观地讲, $(\mathcal{F}_t)$ 代表了直到 t 时刻我们所能掌握的信息. 而 X_t 是 $(\mathcal{F}_t)$- 适应过程则是说对任何时刻 t_0 我们都能确定 X_t 在 t_0 时刻以前的轨道. 本节仅限于讨论关于 $(\mathcal{F}_t)$- 适应的随机过程. 这意味着对于任何当前时刻 t_0,X_t 在 t_0 以前的行为是可以完全确定的, 而此时过程的随机性 (或不确定性) 只表现在 t_0 时刻以后, 即将来行为的不确定性上.

注 $(\mathcal{F}_t)$ 是由 Brown 运动产生这一限制是可以放宽的, 但为阐明问题的实质, 我们仅限于在这一框架下讨论. 对一般情况有兴趣的读者可以参见 [B]. 我们还仅限于讨论给定时间区间 $[0,T]$ 上的平方可积的随机过程.

我们分别用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $|\cdot|$ 来记一个 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的标量积和范数. 对于任一给定的 $(\mathcal{F}_t)$- 停时 τ, 我们以 $\mathcal{M}(0,\tau;\mathbb{R}^n)$ 记满足

$$\mathbb{E}\int_0^T|v_t|^2dt<\infty$$

的 $(\mathcal{F}_t)$- 适应的 $\mathbb{R}^n$- 值的过程全体. 它是一个 Hilbert 空间.

本节讨论以下形式的 BSDE

$$Y_t=\xi+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s)ds-\int_t^T Z_s dW_s. \tag{2.1}$$

问题的提法是：寻找一对 $\mathcal{F}_t$- 适应的过程 $(Y_t, Z_t) \in \mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d})$ 满足 BSDE(2.1).

注 很多读者容易对"一对过程的唯一性"这一点产生疑问. 这里作进一步的说明. 此处的唯一性，就是指在 $M(0,T;\mathbb{R}^{m\times d})$ 空间中的存在唯一性，即如果有两个过程 (Y^1, Z^1) 和 (Y^2, Z^2) 都同时满足 (2.1)，则必有

$$\mathbb{E}\int_0^T |Y_t^1 - Y_t^2|^2 dt = 0, \quad \mathbb{E}\int_0^T |Z_t^1 - Z_t^2|^2 dt = 0.$$

但是还要注意的另一点是，(Y, Z) 的存在唯一性意味着过程 Y 也被唯一确定了.

注 解 (Y_t, Z_t) 的存在唯一性意味着 (Y_t) 是如下的 Itô 过程

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t g(s, Y_s, Z_s)ds + \int_0^t Z_s dW_s,$$

这种说法不易表明方程的终端条件.

我们先考虑一个简单的情况，即 g 是实值的并且不含变量 (y, z) 的情况.

引理 2.1 对于给定的 $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbb{R})$ 及满足如下条件

$$\mathbb{E}(\int_0^T |g_0(t)|dt)^2 < \infty$$

的 $g_0(\cdot)$，存在唯一的一对过程 $(Y_t, Z_t) \in \mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^{1+d})$，满足

$$Y_t = \xi + \int_t^T g_0(s)ds - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{2.2}$$

此时若 $g_0(\cdot) \in \mathcal{M}(0,T;\mathbb{R})$，则我们有下列基本估计：

$$\begin{aligned}&|Y_t|^2 + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\int_t^T \left[\frac{\beta}{2}|Y_s|^2 + |Z_s|^2\right] e^{\beta(s-t)}ds \\ &\le \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}|\xi|^2 e^{\beta(T-t)} + \frac{2}{\beta}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\int_t^T |g_0(s)|^2 e^{\beta(s-t)}ds.\end{aligned} \tag{2.3}$$

特别地，

$$|Y_0|^2 + \mathbb{E}\int_0^T \left[\frac{\beta}{2}|Y_s|^2 + |Z_s|^2\right] e^{\beta s} ds$$
$$\leq \mathbb{E}|\xi|^2 e^{\beta T} + \frac{2}{\beta}\mathbb{E}\int_0^T |g_0(s)|^2 e^{\beta s} ds, \tag{2.4}$$

其中 β 是任意给定的正常数.

证明 我们记

$$M_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[\xi + \int_0^T g_0(s)ds].$$

(M_t) 显然是平方可积的 $(\mathcal{F}_t)$- 鞅. 由 Brown 鞅的随机积分表示定理，存在唯一的适应过程 $(Z_t) \in \mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^d)$ 使得

$$M_t = M_0 + \int_0^t z_s dW_s.$$

从而有

$$M_t = M_T - \int_t^T Z_s dW_s.$$

我们记

$$Y_t = M_t - \int_0^t g_0(s)ds = M_T - \int_0^t g_0(s)ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

注意到 $M_T = \xi + \int_0^T g_0(s)ds$, 从而立刻得 (2.2).

唯一性是估计 (2.3) 或 (2.4) 的简单推论. 我们只要证明这两个估计就行了. 为证 (2.3), 我们先来考虑 ξ 和 $g_0(\cdot)$ 是有界的情况. 此时由

$$Y_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left[\xi + \int_t^T g_0(s)ds\right]$$

知 Y_t 也有界. 在区间 $[t,T]$ 上将 Itô 公式应用于 $|Y_s|^2e^{\beta(s-t)}$ 得

$$
\begin{aligned}
|Y_t|^2 &+ \int_t^T [\beta|Y_s|^2 + |Z_s|^2]e^{\beta s}ds \\
&= |\xi|^2 e^{\beta T} + \int_t^T 2Y_s g_0(s)e^{\beta s}ds - \int_t^T e^{\beta s}2Y_s Z_s dW_s.
\end{aligned}
$$

由于 Y_t 是 $(\mathcal{F}_t)$- 可测的，我们在上式两端取关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的条件数学期望得

$$
\begin{aligned}
|Y_t|^2 &+ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \int_t^T [\beta|Y_s|^2 + |Z_s|^2]e^{\beta s}ds \\
&= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}|\xi|^2 e^{\beta T} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\int_t^T 2Y_s g_0(s)e^{\beta s}ds \\
&\le \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}|\xi|^2 e^{\beta T} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\int_t^T \left[\frac{\beta}{2}|Y_s|^2 + \frac{2}{\beta}|g_0(s)|^2\right]e^{\beta s}ds.
\end{aligned}
$$

由此立得 (2.3) 和 (2.4).

对于 ξ 或 $g_0(\cdot)$ 有界性不成立的一般情况，我们可以记

$$
\xi^n := (\xi \wedge n) \vee (-n); \qquad g_0^n(s) := (g_0(s) \wedge n) \vee (-n),
$$

$$
Y_t^n := \xi^n + \int_t^T g_0^n(s)ds - \int_t^T Z_s^n dW_s.
$$

此时由于对于每一个正整数 n 和 k, ξ^n, ξ^k, g_0^n 及 g_0^k 都是有界的，从而有估计

$$
\begin{aligned}
|Y_t^n|^2 &+ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\int_t^T [\frac{\beta}{2}|Y_s^n|^2 + |Z_s^n|^2]e^{\beta(s-t)}ds \\
&\le \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}|\xi^n|^2 e^{\beta(T-t)} + \frac{2}{\beta}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\int_t^T |g_0^n(s)|^2 e^{\beta(s-t)}ds,
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T &[\frac{\beta}{2}|Y_s^n - Y_s^k|^2 + |Z_s^n - Z_s^k|^2]e^{\beta s}ds \\
&\le \mathbb{E}|\xi^n - \xi^k|^2 e^{\beta T} + \frac{2}{\beta}\mathbb{E}\int_0^T |g_0^n(s) - g_0^k(s)|^2 e^{\beta s}ds.
\end{aligned}
$$

第二个不等式说明过程 $\{Y^n\}$ 和 $\{Z^n\}$ 都是 $\mathcal{M}(0,T)$ 中的 Cauchy 序列. 从而在第一个不等式两边令 n 趋向 ∞ 即得 (2.3). ∎

下面可以考虑一般情况下的 BSDE (2.1) 了. 我们设

$$g=g(\omega,t,y,z):\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}^m$$

给定如下: 对每一个 $(y,z)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}$, $g(\cdot,y,z)$ 是 $\mathbb{R}^m$- 值的 $(\mathcal{F}_t)$- 适应的过程, 并满足

$$\int_0^T|g(\cdot,0,0)|ds\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;\mathbb{R}). \tag{H2.1}$$

我们还假设 g 关于 (y,z) 满足 Lipschitz 条件: $\forall y,\ y'\in\mathbb{R}^m$, $z,\ z'\in\mathbb{R}^{m\times d}$

$$|g(t,y,z)-g(t,y',z')|\le C(|y-y'|+|z-z'|). \tag{H2.2}$$

下面就是本节的主要定理: 倒向随机微分方程的存在唯一性定理.

定理 2.2 设 g 满足 (H2.1) 及 (H2.2). 则对于任何给定的终端条件 $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;\mathbb{R}^m)$, BSDE (2.1) 存在唯一的解. 即存在满足 (2.1) 的唯一的 $\mathcal{F}_t$- 适应过程 $(Y,Z)\in\mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d})$.

证明 我们在基本估计式 (2.3) 中固定 $\beta=8(1+C^2)$, 其中 C 是 g 的 Lipschitz 常数. 我们需要在空间 $\mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^n)$ 中引入一个与 β 有关的范数:

$$\|v(\cdot)\|_\beta\equiv\left\{\mathbb{E}\int_0^T|v_s|^2e^{\beta s}ds\right\}^{\frac{1}{2}}$$

它显然等价于 $\mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^n)$ 原来的范数, 但我们将会看到, 它更适于用来构造我们的压缩映像. 我们应用引理 2.1, 通过

$$Y_t=\xi+\int_t^T g(s,y_s,z_s)ds-\int_t^T Z_sdW_s$$

引进我们所要的映像

$$(Y_\cdot, Z_\cdot) = I[(y_\cdot, z_\cdot)] : \mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}) \to \mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}.$$

下面要证明这个映像 I 在范数 $\|\cdot\|_\beta$ 下是严格压缩的.

对 $\mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d})$ 的任意两对元素 (y,z) 及 (y',z'), 记

$$(Y,Z) = I[(y,z)], \qquad (Y',Z') = I[(y',z')],$$

且记其差为 $(\widehat{y},\widehat{z}) = (y-y',z-z')$, $(\widehat{Y},\widehat{Z}) = (Y-Y',Z-Z')$. 由基本估计 (2.4) 得

$$\mathbb{E}\int_0^T (\frac{\beta}{2}|\widehat{Y}_s|^2 + |\widehat{Z}_s|^2)e^{\beta s}ds \le \frac{2}{\beta}\mathbb{E}\int_0^T |g(s,y_s,z_s)-g(s,y_s',z_s')|^2 e^{\beta s}ds,$$

由于 g 满足 Lipschitz 条件, 故有

$$\mathbb{E}\int_0^T \left[\frac{\beta}{2}|\widehat{Y}_s|^2 + |\widehat{Z}_s|^2\right] e^{\beta s}ds \le \frac{4C^2}{\beta}\mathbb{E}\int_0^T [|\widehat{y}_s|^2 + |\widehat{z}_s|^2]e^{\beta s}ds,$$

由此令 $\beta = 8(1+C^2)$ 得

$$\mathbb{E}\int_0^T [|\widehat{Y}_s|^2 + |\widehat{Z}_s|^2]e^{\beta s}ds \le \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T [|\widehat{y}_s|^2 + |\widehat{z}_s|^2]e^{\beta s}ds,$$

或

$$\|(\widehat{Y},\widehat{Z})\|_\beta \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|(\widehat{y},\widehat{z})\|_\beta.$$

从而 I 是 $\mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d})$ 中的一个严格压缩映像. 由不动点定理知它有唯一的不动点, 从而 BSDE (2.1) 有唯一的解. ∎

基本估计 (2.3) 和 (2.4) 还可以用来证明 BSDE (2.1) 关于参数的连续依赖性. 设 (Y^1,Z^1) 和 (Y^1,Z^2) 分别是下述 BSDE

$$Y_t^1 = \xi^1 + \int_t^T [g(s,Y_s^1,Z_s^1) + {\varphi^1}_s]ds - \int_t^T Z_s^1 dW_s \qquad (2.5)$$

$$Y_t^2 = \xi^2 + \int_t^T [g(s, Y_s^2, Z_s^2) + \varphi^2{}_s]ds - \int_t^T Z_s^2 dW_s \tag{2.6}$$

的解. 其中终端条件 ξ^1 和 ξ^2 是 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; I\!R^m)$ 中的给定元素; φ^1 和 φ^2 是 $\mathcal{M}(0, T; I\!R^m)$ 中的两个过程. g 如前一样, 满足 (H2.1) 及 (H2.2). 在区间 $[t, T]$ 上对 $|Y_s^1 - Y_s^2|^2 e^{\beta(s-t)}$ 应用 Itô 公式, 用与前面类似的方法可得下面定理中的估计 (2.7).

定理 2.3 BSDE (2.5) 和 (2.6) 的解的差满足

$$\begin{aligned} &|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \frac{1}{2} I\!E^{\mathcal{F}_t} \int_t^T [|Y_s^1 - Y_s^2|^2 + |Z_s^1 - Z_s^2|^2] e^{\beta(s-t)} ds \\ &\leq I\!E^{\mathcal{F}_t} |\xi^1 - \xi^2|^2 e^{\beta(T-t)} + I\!E^{\mathcal{F}_t} \int_t^T |\varphi_s^1 - \varphi_s^2| e^{\beta(s-t)} ds, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 $\beta = 16(1 + C^2)$.

对一个固定的 $t_0 \in [0, T]$, 我们记

$$\mathcal{F}_t^{t_0} = \sigma\{\mathcal{N} \cup \sigma\{B_s - B_{t_0}; t_0 \leq s \leq t\}\}, \quad t \in [t_0, T].$$

下面的结论是 BSDE (2.1) 唯一性的一个简单的推论.

命题 2.4 我们仍设 g 满足假设 (H2.1) 和 (H2.2). 若对于某一个给定的 $t_0 \in [0, T]$ 及对于每一个 $(y, z) \in I\!R^m \times I\!R^{m \times d}$, $g(\cdot, y, z)$ 在区间 $[t_0, T]$ 上还是 $(\mathcal{F}_t^{t_0})$- 适应的并且 $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^{t_0}, P; I\!R^m)$. 则 BSDE(2.1) 的解 (Y, Z) 在区间 $[t_0, T]$ 上也是 $(\mathcal{F}_t^{t_0})$- 适应的. 特别地, Y_{t_0} 及 Z_{t_0} 都是常数.

证明 记 (Y', Z') 为区间 $[t_0, T]$ 上的 BSDE 的 $(\mathcal{F}_t^{t_0})$- 适应解:

$$Y_t' = \xi + \int_t^T g(s, Y_s', Z_s')ds - \int_t^T Z_s' dW_s^0,$$

其中我们记 $W_t^0 \equiv W_t - W_{t_0}$. 注意到 $(W_s^0)_{t_0 \leq s \leq T}$ 是区间 $[t_0, T]$ 上的 $(\mathcal{F}_t^{t_0})$-Brown 运动. 但另一方面, 过程 $(Y_t', Z_t')_{t_0 \leq s \leq T}$ 也是 $(\mathcal{F}_t)$-适应的而且

$$\int_t^T Z_s' dW_s = \int_t^T Z_s' dW_s^0, \quad t \in [t_0, T].$$

从而由唯一性知，在区间 $[t_0,T]$ 上， BSDE (2.1) 的解 (Y,Z) 与 (Y',Z') 重合，因而关于 $(\mathcal{F}_t^{t_0})$- 适应的. ∎

注 2.5 BSDE (2.1) 的一个特例是， ξ 是确定的并且对于每一个 $(y,z)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}$, $g(\cdot,y,z)$ 是确定的过程. 这时 BSDE (2.1) 的解 $(Y_\cdot,Z_\cdot)$ 就是 $(Y_0(\cdot),0)$, 其中 $Y_0(\cdot)$ 是下面的常微分方程在区间 $[0,T]$ 的解：

$$-\dot{Y}_0(t)=g(t,Y_0(t),0),\quad Y_0(T)=\xi.$$

这个"平凡"的解有一个经济学上的非平凡的解释：（在一个完全的市场里）若投资者要达到一个完全确定的目标，那么在整个投资过程中他不能进行任何风险性投资，他只能将他的钱投资于债券.

§ 3. 一维情况：比较定理和半群性质

这一节我们只限于讨论一维情况下的 BSDE, 即 g (从而 y) 是实值的 $(m=1)$. 这时的 BSDE 有一个重要的性质：比较定理. 我们将介绍稍微更一般意义下的 BSDE 的比较定理： Y_t 可以是右连左极 (RCLL) 过程. 一个过程称为是右连左极的 (RCLL), 如果它的几乎所有的样本都是右连续且具有左极限. 一个右连左极过程 $(A(\cdot))$ 称为增过程，如果它的几乎所有的样本都是单调增的并且 $A_0(\omega)=0$.

考虑下面的问题：求一对过程 $(Y,Z)\in\mathcal{M}(0,T;\mathbb{R})^{1+d}$ 满足 BSDE

$$Y_t=\xi+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s)ds+(V_T-V_t)-\int_t^T Z_s dW_s, \tag{3.1}$$

其中 (V_t) 是如下给定的 RCLL 过程

$$(V_t)\in\mathcal{M}(0,T;\mathbb{R})\ 且\ \sup_{t\le T}\mathbb{E}|V|^2<\infty. \tag{H3.1}$$

今后我们用 $L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R})$ 表示满足 (H3.1) 的 RCLL 过程全体.

下面的结论是定理 2.1 的简单推论.

命题 3.1 假设 (H2.1),(H2.2) 和 (H3.1) 成立. 则对每一个 $\xi \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;\mathbb{R})$, 存在唯一的一对过程 $(Y_t,Z_t)\in\mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^{1+d})$ 满足 BSDE(1.1), 并且 (Y_t+V_t) 是连续的. 我们还有如下估计:

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2<\infty. \tag{3.2}$$

证明 当 $V_t\equiv 0$ 时就是定理 2.2. 而一般的情况可通过引入一个变量代换 $\overline{Y}_t:=Y_t+V_t$ 使问题变成处理一个等价的 BSDE

$$\overline{Y}_t=\xi+V_T+\int_t^T g(s,\overline{Y}_s-V_s,Z_s)ds-\int_t^T Z_s dW_s.$$

而估计式 (3.2) 是由

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t Z_s dW_s|^2<\infty,\quad \mathbb{E}\int_0^T|g(s,Y_s,Z_s)|^2ds<\infty$$

推得的. ∎

对于给定的随机变量

$$\widehat{\xi}\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;\mathbb{R}), \tag{3.3}$$

记 $(\widehat{Y},\widehat{Z})\in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{1+d})$ 为下列 BSDE 的解

$$\widehat{Y}_t=\widehat{\xi}+\int_t^T g(s,\widehat{Y}_s,\widehat{Z}_s)ds+(V_T-V_t)-\int_t^T\widehat{Z}_s dW_s. \tag{3.4}$$

下面的估计与 (2.7) 的证明是完全一样的.

命题 3.2 设 (H2.1),(H2.2) 和 (H3.1) 成立. 则 BDSE (3.1) 和 (3.4) 的解的差满足下面的连续依赖性:

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}|Y_t-\widehat{Y}_t|^2+\mathbb{E}\int_0^T|Z_s-\widehat{Z}_s|^2ds\le C\mathbb{E}|\xi-\widehat{\xi}|^2. \tag{3.5}$$

下面的比较定理是非常有用的. 此定理首先在 [P5] 中获得. 文章 [EPQ] 和 [PP4] 又简化了 [P5] 的证明. 严格比较定理是在 [P10] 中给出的. 以下的证明方法取自 [EPQ].

定理 3.3 (比较定理) 我们的假设同命题 3.1. 如果 $(\overline{Y},\overline{Z})$ 是 BSDE

$$\overline{Y}_t = \overline{\xi} + \int_t^T \overline{g}_s + V_T - V_t - \int_t^T \overline{Z}_s dW_s \tag{3.6}$$

的解, 其中 $(\overline{g}_t),(\overline{V}_t) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R})$ 和 $\overline{\xi} \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;\mathbb{R})$ 都给定, 满足

$$\xi \geq \overline{\xi}, \quad g(t,\overline{Y}_t,\overline{Z}_t,) \geq \overline{g}_t, \quad \text{a.s.,a.e.,} \tag{3.7}$$

且使 $\overline{V} - V$ 为增过程, 则有

$$Y_t \geq \overline{Y}_t, \quad \text{a.e.,a.s..} \tag{3.8}$$

此时我们有 (严格比较定理)

$$Y_0 = \overline{Y}_0 \iff \xi = \overline{\xi},\ g(s,\overline{Y}_s,\overline{Z}_s) \equiv \overline{g}_s \text{ 且} V_s \equiv \overline{V}_s. \tag{3.9}$$

证明 为简单计, 我们只证 Brown 运动为一维的情况, 即 $d=1$. 我们记 $\widehat{Y} = Y - \overline{Y}, \widehat{Z} = Z - \overline{Z}, \widehat{\xi} = \xi - \overline{\xi}, \widehat{g}_s = g(s,\overline{Y}_s,\overline{Z}_s) - \overline{g}_s$, $\widehat{V} = V - \overline{V}$. 此时有

$$\begin{cases} -d\widehat{Y}_s = & (a_s\widehat{Y}_s + b_s\widehat{Z}_s + \widehat{g}_s)ds + d\widehat{V}_s - \widehat{Z}_s dW_s, \\ \quad \widehat{Y}_T = & \widehat{\xi}, \end{cases}$$

其中

$$a_s := \begin{cases} \frac{g(s,Y_s,Z_s) - g(s,\overline{Y}_s,Z_s)}{Y_s - \overline{Y}_s}, & \text{若} Y_s \neq \overline{Y}_s, \\ 0, & \text{若} Y_s = \overline{Y}_s, \end{cases}$$

$$b_s := \begin{cases} \frac{g(s,\overline{Y}_s,Z_s) - g(s,\overline{Y}_s,\overline{Z}_s)}{Z_s - \overline{Z}_s}, & \text{若} Z_s \neq \overline{Z}_s, \\ 0, & \text{若} Z_s = \overline{Z}_s. \end{cases}$$

由 g 满足 Lipschitz 条件知， $|a_s|\le C$ 且 $|b_s|\le C$. 我们令

$$Q_t := \exp\left[\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b_s|^2 ds + \int_0^t a_s ds\right],$$

且在区间 $[0,T]$ 上对乘积 $Q_t\widehat{Y}_t$ 应用 Itô 公式并取期望得

$$\widehat{Y}_0 = I\!E\left[\widehat{Y}_T Q_T + \int_0^T Q_t \widehat{g}_t dt + \int_0^T Q_t d\widehat{V}_t\right] \ge 0.$$

由此知，对 $t=0$ 比较定理成立．对 $t>0$ 情形证明类似． ∎

例 3.4 实际应用中经常对以下两个 BSDE 进行比较：

$$Y_t^1 = \xi^1 + \int_t^T [g(s, Y_s^1, Z_s^1) + c_s^1] ds - \int_t^T Z_s^1 dW_s \tag{3.10}$$

和

$$Y_t^2 = \xi^2 + \int_t^T [g(s, Y_s^2, Z_s^2) + c_s^2] ds - \int_t^T Z_s^2 dW_s, \tag{3.11}$$

其中 $c^1(\cdot), c^2(\cdot) \in \mathcal{M}(0,T,I\!R)$. 此时若设 $c_s^1 \ge c_s^2$,a.e.,a.s., 及 $\xi \ge \overline{\xi}$ a.s., 则容易由上面的比较定理知， $Y_t \ge \overline{Y}_t$,a.s.,a.e.. 在金融市场中 (如 Merton 模型),$c(\cdot)$ 代表投资者的消费率， $Y(t)$ 代表他在的 t 时刻的财产，而 $Z(t)$ 则代表他在 t 时刻的投资组合策略．这时比较定理可以作如下解释：如果一个投资者想在将来的一个时刻达到较高的财政目标，那么他或者现在必须投入更多的钱，或者在 T 时刻以前较少消费．

例 3.5 我们来考虑 BSDE (3.10) 的一个特殊情况： $g(s,0,0)\equiv 0$. 此时易知，若 $c_s^2\equiv 0$ 且 $\xi^2=0$, 则 BSDE (3.11) 的唯一的解是 $(Y_s^2, Z_s^2)\equiv 0$. 这时如果 ξ 和 $c^1(\cdot)$ 都是非负的，那么 (3.10) 的解 Y^1 也是非负的．而且这时我们还有

$$y_0^1 = 0 \iff c_s^1 \equiv 0 \text{ 且} \xi^1 = 0.$$

这一结果有一个金融学的解释：这样的金融市场是无套利的 (no-arbitrage)：如果一个投资者想在将来时刻 T 获得一个无风险的获利机会 (即 $\xi^1 \geq 0$ 且 $\mathbb{E}\xi^1 > 0$)，那么他在当前时刻 $t = 0$ 必须投资 $y_0^1 > 0$.

例 3.6 我们设 $g(s,0,0) \equiv 0$ 及 $\xi \geq 0, \mathbb{E}[\xi] > 0$. 考虑下面含参数 $\lambda \in (0,\infty)$ 的 BSDE:

$$Y_t^\lambda = \lambda\xi + \int_t^T g(s, Y_s^\lambda, Z_s^\lambda)ds - \int_t^T Z_s^\lambda dW_s.$$

此时可以证明

$$\lim_{\lambda\uparrow\infty} Y_0^\lambda = +\infty.$$

事实上，我们可以将它与下面的 BSDE 的解比较

$$\overline{Y}_t^\lambda = \lambda\xi + \int_t^T C(-|\overline{Y}_s^\lambda| - |\overline{Z}_s^\lambda|)ds - \int_t^T \overline{Z}_s^\lambda dW_s,$$

其中 C 是 g 关于 (y,z) 的 Lipschitz 常数. 由比较定理得

(i) 对每一个 $\lambda > 0, Y_0^\lambda \geq \overline{Y}_0^\lambda$;

(ii) 当 $\lambda = 1$ 时有 $\overline{Y}_0^1 > 0$.

但注意到以下事实：对每一个 $\lambda \geq 0$, 我们都有 $\overline{Y}_t^\lambda \equiv \lambda\overline{Y}_t^1$ 且 $\overline{Z}_t^\lambda \equiv \lambda\overline{Z}_t^1$. 由此及 (i),(ii) 得

$$Y_0^\lambda \geq \overline{Y}_0^\lambda = \lambda\overline{Y}_0^1 \uparrow \infty.$$

上面的例子用金融学的术语可作如下解释：如果一个投资者想使其资产在一个将来时刻 T 达到充分高的数学期望，那他就必须在当前时刻 $t = 0$ 投入充分多的钱.

习题 3.7 试证 Y_0^λ 也是在下述意义下上有界的：

$$Y_0^\lambda \leq \lambda\widehat{Y}_0,$$

其中 $\widehat{Y}_0$ 是一个常数.

我们在 §2 中已经谈及：尽管 BSDE 的解总是由一对过程 (Y,Z) 来描述. 但是其 "主要部分" 则是前一项 Y. 以下我们将看到：过程 Y 还满足 "后向半群" 的命题. 为此我们引入下面的定义.

对于给定的 $t_1 \le T$ 及 $\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_1}, P; \mathbb{R})$, 考虑下面的定义于区间 $[0, t_1]$ 上的 BSDE:

$$y_r = \eta + \int_r^{t_1} g(s, y_s, z_s) ds - \int_r^{t_1} z_s dW_s, \quad r \in [0, t_1]. \tag{3.12}$$

然后对于每一个 $r \le t_1$ 我们定义

$$\mathbf{G}_{r,t_1}[\eta] := y_r : L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_1}, P; \mathbb{R}) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}_r, P; \mathbb{R}). \tag{3.13}$$

由 BSDE 的唯一性，我们立刻知，对于 $t < r \le t_1$, 有

$$\mathbf{G}_{t,t_1}[\eta] = \mathbf{G}_{t,r}[Y_r] = \mathbf{G}_{t,r}\left[\mathbf{G}_{r,t_1}[\eta]\right]. \tag{3.14}$$

定理 3.8 我们假设 (H1.1) 的 (i) 及 (H1.2) 成立. 则 $\mathbf{G}$ 具有以下性质：

(i) $\mathbf{G}_{t_1,t}[\eta] = \mathbf{G}_{t_1,t_2}\left[\mathbf{G}_{t_2,t}[\eta]\right], \quad \forall 0 \le t_1 \le t_2 \le t$;

(ii) $\lim_{r \uparrow t} \mathbf{G}_{r,t}[\eta] = \eta, \qquad \forall \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$;

(iii) $\lim_{i\to\infty} \mathbb{E}|\mathbf{G}_{r,t}[\eta_i] - \mathbf{G}_{r,t}[\eta]|^2 = 0$, 若 $\mathbb{E}|\eta_i - \eta|^2 \to 0$;

(iv) $\eta_1 \ge \eta_2, \quad \text{a.s.} \quad \Longrightarrow \quad G_{r,t}(\eta_1) \ge G_{r,t}(\eta_2), \quad \text{a.s.}$;

(v) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_r} G_{r,t}(\eta_1) - G_{r,t}(\eta_2)|^2 \le C\mathbb{E}^{\mathcal{F}_r}|\eta_1 - \eta_2|^2 \quad \text{a.s.}$,

其中 (i) 和 (ii) 刻画了 $\mathbf{G}$ 的 "后向半群" 的性质. (iii) 和 (iv) 分别描述了这个半群的连续性和单调性.

注 3.9 一个特别有趣的情况是当 g 满足

$$g(s, y, z)|_{z=0} = 0 \tag{3.15}$$

的时侯. 此时显然有, 对任何 $0 \le r \le t \le T$,

$$\mathbf{G}_{r,t}[\eta] = \eta, \quad \forall \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_r, P; \mathbb{R}), \tag{3.16}$$

并且

$$\mathbf{G}_{r,t}[\eta] = \mathbf{G}_{r,T}[\eta], \quad \forall \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}). \tag{3.17}$$

因此, 若我们记 $\mathcal{E}_g[\xi] := \mathbf{G}_{0,T}[\eta]$, 则 $\mathcal{E}_g[\cdot]$ 成了一种非线性形式的"数学期望": 它保留了数学期望的除了线性性以外的所有性质, 即单调性、连续性和常数不变性 ($\mathcal{E}_g[c] = c$). 我们称 $\mathcal{E}_g[\xi]$ 为关于 η 的 g- 期望. 我们将在 §8 讨论这一概念.

§ 4. 与 Itô 型正向 SDE 耦合的 BSDE

本节我们考虑与经典的 (正向) 随机微分方程 (SDE) 相联系的 BSDE. 为此我们考虑以初始条件 $(t, \zeta) \in [0, T) \times L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^n)$ 为参数的一族 SDE

$$\begin{aligned} dX_s^{t,\zeta} &= b(s, X_s^{t,\zeta})ds + \sigma(s, X_s^{t,\zeta})dW_s, \quad s \in [t, T], \\ X_t^{t,\zeta} &= \zeta. \end{aligned} \tag{4.1-1}$$

而其中我们最感兴趣的是 ζ 为确定性的情况 $\zeta = x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} dX_s^{t,x} &= b(s, X_s^{t,x})ds + \sigma(s, X_s^{t,x})dW_s, \quad s \in [t, T], \\ X_t^{t,x} &= x, \end{aligned} \tag{4.1-2}$$

这里对于任何给定的 $x \in \mathbb{R}^n, b(\cdot, x)$ 和 $\sigma(\cdot, x)$ 分别是取值于 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 的有界的且关于 $(\mathcal{F}_t)$- 适应的过程. 我们还假设 b 和 σ 关于 x 满足 Lipschitz 条件: $\forall t \in [0, T]$, $\forall x$, $x' \in \mathbb{R}^n$

$$|b(t, x) - b(t, x')| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, x')| \le C|x - x'|. \tag{H4.1}$$

我们知道, 在上述假设之下 SDE (4.1) 有唯一的强解, 并且对于每一个 $t \in [0, T)$, $\forall \zeta$, $\zeta' \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^n)$ 有

$$\mathbb{E}[\sup_{s\in[t,T]} |X_s^{t,\zeta} - X_s^{t,\zeta'}|^2 | \mathcal{F}_t] \le C_0|\zeta - \zeta'|^2, \text{ a.s.}, \tag{4.2-1}$$

且对于每一个 $p \geq 2$, 有

$$\mathbb{E}[\sup_{s\in[t,T]} |X_s^{t,\zeta}|^p] \leq C_p|\zeta|^p, \ \forall\zeta \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^n), \ \text{a.s.}. \quad (4.2\text{-}2)$$

这里的常数 C_0 只与 b 和 σ 的 Lipschitz 常数有关, C_p 只与 b 和 σ 的 Lipschitz 常数及 p 有关. 给定满足下面条件的取值于 $\mathbb{R}^m$ 的函数 $f = f(t,x,y,z)$ 和 $\Phi(x)$: 对于每一个 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$,$f(\cdot,x,y,z)$ 是有界的 $(\mathcal{F}_t)$- 适应的过程, $\Phi(x)$ 是有界的 $\mathcal{F}_T$- 可测的随机变量. 我们设 f 关于 (y,z) Lipschitz 连续, 并且 f 和 Φ 关于 x 为 α-Hölder 连续的 ($\alpha \in (0,1]$), 即对于每一个 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ 中的 (x,y,z) 和 (x',y',z') , 我们有

$$\begin{aligned}|\Phi(x) - \Phi(x')| + |f(t,x,y,z) - f(t,x',y',z')| \\ \leq C(|y-y'| + |z-z'| + |x-x'|^\alpha),\end{aligned} \quad \text{(H4.2)}$$

我们还假设 f 和 Φ 满足以下的线性增长条件:

$$|f(t,x,0,0)| + |\Phi(x)| \leq C(1+|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad \text{(H4.3)}$$

在以上的假设下可以验证: $f(t,X_t^{t,\zeta},y,z)$ 和 $\xi = \Phi(X_T^{t,\zeta})$ 满足了定理 2.2 的所要求的条件. 从而以下的 BSDE 有唯一的解

$$\begin{aligned} -dY_s^{t,\zeta} &= f(s,X_s^{t,\zeta},Y_s^{t,\zeta},Z_s^{t,\zeta})ds - Z_s^{t,\zeta}dW_s, \quad s\in[t,T], \\ Y_T^{t,\zeta} &= \Phi(X_T^{t,\zeta}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

我们首先有

命题 4.1 设 (H4.1)-(H4.3) 成立. 则对于任给的 $t < T$ 以及相应的 t 时刻的初始条件 $\zeta, \zeta' \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^n)$, 我们有以下估计:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad |Y_t^{t,\zeta} - Y_t^{t,\zeta'}| \leq C_0|\zeta-\zeta'|^\alpha, \\ &\text{(ii)} \quad |Y_t^{t,\zeta}| \leq C_0(1+|\zeta|). \end{aligned} \quad (4.4)$$

证明 由定理 2.3 我们有

$$
\begin{aligned}
|Y_t^{t,\zeta}-Y_t^{t,\zeta'}|^2 &\le C\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[e^{\beta T}|\Phi(X_T^{t,\zeta})-\Phi(X_T^{t,\zeta'})|^2] \\
&\quad + C\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\int_t^T |f(s,X_s^{t,\zeta},Y_s^{t,\zeta},Z_s^{t,\zeta})-f(s,X_s^{t,\zeta'},Y_s^{t,\zeta},Z_s^{t,\zeta})|^2 ds \\
&\le C\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}|X_T^{t,\zeta}-X_T^{t,\zeta'}|^{2\alpha}+C\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\int_t^T |X_s^{t,\zeta}-X_s^{t,\zeta'}|^{2\alpha} ds.
\end{aligned}
$$

从而当 $\alpha<1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&|Y_t^{t,\zeta}-Y_t^{t,\zeta'}|^2 \\
&\le C\{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}|X_T^{t,\zeta}-X_T^{t,\zeta'}|^2\}^\alpha + C\Big[\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\int_t^T |X_s^{t,\zeta}-X_s^{t,\zeta'}|^2 ds\Big]^\alpha.
\end{aligned}
$$

由此及 (4.2-1) 和 (4.2-2) 即得估计 (4.4). ∎

对于任何 $x\in\mathbb{R}^n$, 我们定义

$$
u(t,x) := Y_s^{t,x}|_{s=t}. \tag{4.5}
$$

以下的估计可由 (4.4) 直接推出:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \ |u(t,x)-u(t,x')| \le C_0|x-x'|^\alpha, \\
&\text{(ii)}\ |u(t,x)| \le C_0(1+|x|).
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

注 4.2 这里应指出的是，在一般情况下，u 是随机函数，即对于每一个 $x\in\mathbb{R}^n$,$u(\cdot,x)$ 是一个 (取值于 $\mathbb{R}^m$ 的)($\mathcal{F}_t$)- 适应的过程. 这一点是由于我们对于 $\Phi(x), f(t,x,y,z), b(t,x)$ 及 $\sigma(t,x)$ 所作的较一般的假设 (即对每个 (t,x,y,z), 这些函数可以是随机的) 这一点而引起的. 而若进一步假设，对每个 (t,x,y,z),

$$
b(t,x),\sigma(t,x),\Phi(x),f(t,x,y,z) \text{ 都是确定函数,} \tag{H4.4}
$$

这时 u 就是 (t,x) 的确定性的函数了. 实际上，此时容易验证，对于每一个 (t,x),SDE (4.1-2) 的解 $X_s^{t,x}$ 是 $(\mathcal{F}_s^t)$- 适应的. 因而 $\Phi(X_T^{t,x})$

为 $\mathcal{F}_T^t$- 可测的, 并且对于每一个 $(y,z)\in \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}$, $f(s,X_s^{t,x},y,z)$ 为 $(\mathcal{F}_s^t)$- 适应的过程. 从而根据命题 2.4, BSDE 的解 $(Y_s^{t,x},Z_s^{t,x})_s$, $s\in[t,T]$, 也是 $(\mathcal{F}_s^t)$- 适应的. 特别地, $u(t,x)=Y_t^{t,x}|_{s=t}$ 是确定性的.

注 4.3 一个更特殊的情况是, $m=1$ 而且 f 不含 (y,z), 即 $f=f(t,x)$. 此时若再假设 (H4.4), 则易证 u 有下面的显式表示:

$$u(t,x)=\mathbb{E}\Big[\int_t^T f(s,X_s^{t,x})ds+\Phi(X_T^{t,x})\Big].$$

习题 4.4 除了 (H4.4) 成立和 $m=1$ 的假设外, 再设 $f=c(x)y+f_0(t,x)$, 试证此时 u 给出著名的 Feynman-Kac 公式:

$$u(t,x)=\mathbb{E}\Big[\int_t^T e^{\int_t^s c(X_r^{t,x})dr}f_0(s,X_s^{t,x})ds+\Phi(X_T^{t,x})e^{\int_t^T c(X_r^{t,x})dr}\Big].$$

习题 4.5 如果在注 4.3 和习题 4.4 中去掉假设 (H4.4), 问如何给出 u 的显示表示?

以下的讨论是针对一般情况的, 即不需要假设 (H4.4), 从而 u 一般是一个随机函数. 我们需要引入以下的定义.

定义 4.6 固定一个 $t\in[0,T]$, 称 $\{A_i\}_{i=1}^N\subset\mathcal{F}_t$ 为 $(\Omega,\mathcal{F}_t)$ 的一个分割, 如果 $\bigcup_{i=1}^N A_i=\Omega$ 且满足

$$A_i\in\mathcal{F}_t,\ i=1,\cdots,N;\quad A_i\cap A_j=\emptyset,\ \text{ for } i\neq j.$$

这里的 N 一般是有限的正整数, 但有时也讨论 $N=+\infty$ 的情况.

定理 4.7 对每一个 $\zeta\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P,\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$u(t,\zeta)=Y_t^{t,\zeta}. \tag{4.7}$$

证明 先考虑 ζ 是简单函数的情况:

$$\zeta=\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i}x_i, \tag{4.8}$$

其中 $\{A_i\}_{i=1}^N$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 的一个分割， $x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \cdots, N$. 对于每一个 i, 记

$$(X_s^i, Y_s^i, Z_s^i) \equiv (X_s^{t,x}, Z_s^{t,x}, Z_s^{t,x})|_{x=x_i}.$$

X^i 是 SDE

$$X_s^i = x_i + \int_t^s b(r, X_r^i)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^i)dW_r, \quad s \in [t, T]$$

的解； (Y^i, Z^i) 是 BSDE

$$Y_s^i = \Phi(X_T^i) + \int_s^T f(r, X_r^i, Y_r^i, Z_r^i)dr - Z_r^i dW_r, \quad s \in [t, T]$$

的解. 我们将 $\mathbf{1}_{A_i}$ 乘在这两个方程的等式两边, 然后关于 i 求和. 由以下的简单事实： $\sum_i \varphi(x_i)\mathbf{1}_{A_i} = \varphi(\sum_i x_i \mathbf{1}_{A_i})$ 即可得

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} X_s^i = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} x_i + \int_t^s b\Big(r, \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} X_r^i\Big)dr + \int_t^s \sigma\Big(r, \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} X_r^i\Big)dW_r,$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} Y_s^i = \Phi\Big(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} X_T^i\Big) + \int_s^T f\Big(r, \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} X_r^i, \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} Y_r^i, \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} Z_r^i\Big)dr - \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} Z_r^i dW_r,$$

此时由 SDE 和 BSDE 解的唯一性定理即得

$$X_s^{t,\zeta} = \sum_{i=1}^N X_s^i \mathbf{1}_{A_i}$$

和

$$(Y_s^{t,\zeta}, Z_s^{t,\zeta}) = \Big(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} Y_s^i, \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i} Z_s^i\Big).$$

从而由定义 $u(t,x_i)=Y_t^i$ 知

$$\begin{aligned}Y_t^{t,\zeta} = & \sum_{i=1}^N Y_t^i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^N u(t,x_i)\mathbf{1}_{A_i} \\ = & u(t,\sum_{i=1}^N x_i \mathbf{1}_{A_i}) = u(t,\zeta).\end{aligned}$$

因此当 ζ 是简单函数时 (4.7) 成立.

对一般情况 $\zeta \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P;\mathbb{R}^n)$, 可选一个在 $L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P;\mathbb{R}^n)$ 中收敛于 ζ 的简单函数列 $\{\zeta_i\}$. 此时由估计 (4.4) 和 (4.6) 得到

$$\mathbb{E}|Y_t^{t,\zeta_i} - Y_t^{t,\zeta}]|^2 \le C_0 \mathbb{E}|\zeta_i - \zeta|^{2\alpha} \to 0$$

和

$$\mathbb{E}|u(t,\zeta_i) - u(t,\zeta)|^2 \le C_0 \mathbb{E}|\zeta_i - \zeta|^{2\alpha} \to 0.$$

由此及 $u(t,\zeta_i)=Y_t^{t,\zeta_i}$ 得 (4.7). ∎

我们在 (3.13) 中曾引进 "后向半群" $\mathbf{G}_{r,t}[\cdot]$ 的定义. 现在我们用它来讨论 u 的 "后向半群性质": 对于给定的 $t_1 \in (t,T]$ 和 $\eta \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_{t_1},P;\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$\begin{aligned}-dY_s = & f(s,X_s^{t,\zeta},Y_s,Z_s)ds - Z_s dW_s, \quad s\in[0,t_1], \\ Y_{t_1} = & \eta.\end{aligned}$$

对于每一个 $r \in [t,t_1)$, 我们记 $\mathbf{G}_{r,t_1}^{\zeta}[\eta] := Y_r$. 由这些记号及 u 的定义 (见 (3.14)) 得, 对每一个 $0<\delta<T-t$,

$$u(t,x) = \mathbf{G}_{t,T}^x[\Phi(X_T^{t,x})] = \mathbf{G}_{t,t+\delta}^x\left[Y_{t+\delta}^{t+\delta,X_{t+\delta}^{t,x}}\right].$$

结合 (4.7) 就得到以下命题.

命题 4.8 我们有

$$u(t,x) = \mathbf{G}_{t,t+\delta}^x[u(t+\delta,X_{t+\delta}^{t,x})], \quad 0<\delta<T-t. \tag{4.9}$$

注 4.9 我们现在回顾注 4.3, 这个特例可使我们体会到 (4.9) 的重要性. 此时不难看出，对于一个光滑的函数 $\varphi(x)$, 我们有

$$\mathrm{G}^{x}_{t,t+\delta}[\varphi(X^{t,x}_{t+\delta})] = \mathbb{E}\Big[\int_{t}^{t+\delta} f(s, X^{t,x}_{s})ds + \varphi(t+\delta, X^{t,x}_{t+\delta})\Big].$$

结合 (4.9) 即得

$$u(t,x) = \mathbb{E}\Big[\int_{t}^{t+\delta} f(s, X^{t,x}_{s})ds + u(t+\delta, X^{t,x}_{t+\delta})\Big].$$

如果 u 是个 $C^{2,1}$- 函数, 则对 $u(t+s, X^{t,x}_{t+s}) - u(t,x)$ 在区间 $[t, t+\delta]$ 上应用 Itô 公式得

$$\frac{1}{\delta}\mathbb{E}\Big[\int_{t}^{t+\delta} [(\partial_t u + \mathcal{L}u + f)(s, X^{t,x}_{s})ds\Big] = 0.$$

其中 $\mathcal{L}$ 是如下的二阶椭圆微分算子:

$$\mathcal{L}\varphi(t,x) = \big[\frac{1}{2}Tr(\sigma\sigma^{*}D^{2}\varphi) + \langle D\varphi, b\rangle\big](t,x).$$

令 $\delta \to 0$ 知 u 是如下偏微分方程的解:

$$\partial_t u(t,x) + \mathcal{L}u(t,x) + f(t,x) = 0.$$

以上的形式运算表明在较简单的情况下，由 BSDE (4.3) 的解定义出的函数 u 就是一个偏微分方程的解 . 这就是著名的 Feynman-Kac 公式. 命题 4.8 对建立这两个方程的解的联系方面起了关键的作用. 在下一节里我们会看到，在随机最优控制理论里我们将有与 (4.8) 类似的公式 (事实上是 (4.8) 的推广), 即 (推广的) 动态规划原理，它在获得全非线性的二阶偏微分方程 (它同时推广了 HJB 方程和 Feynman-Kac 公式) 的解的存在性方面起了关键的作用.

习题 4.10 对于情况 $f = c(x)y + f_0(t,x)$ 且设 (H4.4) 成立，作出与注 4.9 相类似的分析.

习题 4.11 设 (H4.4) 成立且存在一个充分光滑的函数 $u(t,x)$: $\mathbb{R}^m \times [0,T] \to \mathbb{R}^m$ 满足下面的 PDE

$$\partial_t u(t,x) + \mathcal{L}u(t,x) + f(t,x,u,Du\sigma) = 0$$

及终端条件 $u(T,x) = \Phi(x)$. 试证 BSDE (4.3) 的解 $(Y_s^{t,\zeta}, Z_s^{t,\zeta})$ 就是 $(u, Du\sigma)(s, X_s^{t,\zeta})$.

习题 4.12 当条件 (H4.4) 不成立时 $u(\cdot,x)$ 就是一个 $(\mathcal{F}_t)$- 适应的过程. 此时 u 是下面的倒向随机 PDE 的解:

$$\begin{aligned}
-du(t,x) &= [\mathcal{L}u(t,x) + f(t,x,u,Du\sigma+\phi) + D\phi\sigma(t,x)]dt \\
&\qquad - [Du\sigma + \phi(t,x)]dW_t, \\
u(T,x) &= \Phi(T,x)
\end{aligned}$$

(见 [P4]). 试证如果 (u,ϕ) 是满足以上 SPDE 的充分光滑的解，则 $\big(u(s,X_s^{t,\zeta}), (Du\sigma+\phi)(s,X_s^{t,\zeta})\big)$ 就是 BSDE (4.3) 的解.

§ 5. 随机最优控制与推广的动态规划原理

我们把 $\mathcal{M}(0,T;\mathbb{R}^k)$ 中的取值于 U 的随机过程全体记为 $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ 中的元素称为容许控制集合. 此处 U 是 $\mathbb{R}^k$ 的一个子集合. 为叙述简便起见我们设 U 是紧的.

对于一给定的容许控制 $v(\cdot) \in \mathcal{U}$, 其相应的以 t 为初始时刻、以 $\zeta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^n)$ 为初始状态的轨线就是以下 SDE 的解:

$$\begin{aligned}
dX_s^{t,\zeta;v} &= b(s, X_s^{t,\zeta;v}, v_s)ds + \sigma(s, X_s^{t,\zeta;v}, v_s)dW_s, \quad s \in [t,T], \\
X_t^{t,\zeta;v} &= \zeta,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $b = b(t,x,v)$ 和 $\sigma = \sigma(t,x,v)$ 分别是取值于 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 定义于 $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ 的可测函数. 我们设 b 和 σ 关于 (x,v) 是线

性增长的，关于 x 是 Lipschitz 连续的，并且关于 v 具有 α-Hölder 连续性，其中 $\alpha \in (0,1]$ 给定：

$$
\begin{aligned}
&|b(t,x,v)| + |\sigma(t,x,v)| \le C(1+|x|+|v|),\\
&|b(t,x,v)-b(t,x',v')| + |\sigma(t,x,v)-\sigma(t,x',v)| \\
&\le C(|x-x'|+|v-v'|^{\alpha}),\ \forall t\in[0,T],\ \forall x,\ x'\in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
\tag{H5.1}
$$

显然，在上述条件下 SDE (5.1) 有唯一解．又由估计 (4.2) 得：$\forall x,\ x' \in \mathbb{R}^n$

$$
\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\big[\sup_{s\in[t,T]}|X_s^{t,\zeta;v}-X_s^{t,\zeta';v}|^2\big] \le C_0(|\zeta-\zeta'|^2+\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\int_t^T |v_s-v_s'|^{2\alpha}ds,
\tag{5.2}
$$

这里的常数 C_0 仅仅依赖于 b 和 σ 关于 x 的 Lipschitz 常数．

设 $f=f(t,x,y,z,v)$ 和 $\Phi(x)$ 是下述给定实值函数：对于每一个 $(x,y,z,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^k$，$f(x,y,z,v,\cdot)$ 是 $(\mathcal{F}_t)$- 适应的有界的过程，$\Phi(x)$ 是 $\mathcal{F}_T$- 可测的有界的随机变量．我们假设 f 关于 (y,z) 满足 Lipschitz 条件，f 和 g 关于 x 为 α-Hölder- 连续，即对于每一个 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m\times d}$ 中的 (x,y,z) 和 (x',y',z')

$$
\begin{aligned}
&|\Phi(x)-\Phi(x')|+|f(t,x,y,z,v)-f(t,x',y',z',v)|\\
&\quad\le C(|y-y'|+|z-z'|+|x-x'|^{\alpha}),
\end{aligned}
\tag{H5.2}
$$

其中 $\alpha\in(0,1]$ 为前面给定的 Hölder 常数．我们还假设 f 和 g 关于 x 满足线性增长条件：

$$
|f(t,x,0,0,v)|+|\Phi(x)|\le C(1+|x|),\quad \forall(x,v)\in\mathbb{R}^n\times U.
\tag{H5.3}
$$

由以上假设容易验证，对于每一个 $v(\cdot)\in\mathcal{U}$ 及 $\zeta\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P;\mathbb{R}^n)$，映射 $g(t,y,z):=f(X_s^{t,\zeta;v},y,z,v_s)$ 和 $\xi:=\Phi(X_T^{t,\zeta;v})$ 在区间 $[t,T]$ 上满足定理 2.2 的全部条件．所以下面的 BSDE 有唯一解：

$$
\begin{aligned}
-dY_s^{t,\zeta;v} &= f(s,X_s^{t,\zeta;v},Y_s^{t,\zeta;v},Z_s^{t,\zeta;v},v_s)ds-Z_s^{t,\zeta;v}dW_s,\ s\in[t,T],\\
Y_T^{t,\zeta;v} &= \Phi(X_T^{t,\zeta;v}).
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

我们还有以下的估计:

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad |Y_t^{t,\zeta;v}-Y_t^{t,\zeta';v}|\le C_0|\zeta-\zeta'|^{\alpha},\\&\text{(ii)}\quad |Y_t^{t,\zeta;v}|\le C_0(1+|\zeta|),\\&\text{(iii)}\ |Y_t^{t,\zeta;v}-Y_t^{t,\zeta;v'}|^2\le C_0 E^{\mathcal{F}_t}\int_t^T|v_s-v_s'|^{2\alpha}ds.\end{aligned}\tag{5.4}$$

事实上，前两个估计式可直接由命题 4.1 得到，而最后一个估计式的推导则与前两个的相同. 我们可以定义

$$J(t,x;v(\cdot)):=Y^{t,x;v}\big|_{s=t}.$$

这里定义的 J 是随机最优控制理论中的代价函数 (或费用函数) 的一个有意义的并且非平凡的推广. 特别地，在计量经济学及数学金融学里它被称为 "递归效用函数".

由定理 4.2 知，对于每一个 $\zeta\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P;\mathbb{R}^n)$,

$$J(t,\zeta;v(\cdot))=Y^{t,\zeta;v}\big|_{s=t}.\tag{5.5}$$

我们注意 (5.5) 的最有意义的情况是: ζ 是确定性的，即 $\zeta=x\in\mathbb{R}^n$. 此时我们可以定义最优控制问题的值函数如下:

$$u(t,x):=\operatorname{ess\,sup}_{v(\cdot)\in\mathcal{U}}J(t,x;v(\cdot)).$$

一般地说，对于每一个给定的 (t,x),$u(t,x)$ 是一个随机变量. 但对于 "Markov 情况", 即当

$$b,\sigma,f\ \text{和}\ g\ \text{是}\ (t,x,y,z,v)\ \text{的确定性函数}\tag{H5.4}$$

满足时，我们有以下的

命题 5.1 设 (H5.1) − (H5.4) 成立. 则值函数 $u(t,x)$ 是一个确定性的函数.

证明 证明要点是构造一个满足 $\lim_{i\to\infty}J(t,x;v^i(\cdot))=u(t,x)$ 的容许控制序列 $\{v^i(\cdot)\}$, 其形状为

$$v_s^i=\sum_{j=1}^{N_i}v_s^{ij}\mathbf{1}_{A_{ij}}.$$

这里 $v^{ij}(\cdot)$ 都是取值于 U 的 $(\mathcal{F}_s^t)$- 适应的随机过程，并且对每一个 i, $\{A_{ij}\}_{j=1}^{N_i}$, 是 $(\Omega,\mathcal{F}_t)$ 的一个分割. 运用与定理 4.2 的证明中相同的方法可得

$$\sum_{j=1}^{N_i} 1_{A_{ij}} J(t,x;v^{ij}(\cdot)) = J\Big(t,x;\sum_{j=1}^{N_i} v_s^{ij} 1_{A_{ij}} v^{ij}(\cdot)\Big) = J(t,x;v^i(\cdot)).$$

注意到 $v^{i1}(\cdot)$ 是 $(\mathcal{F}_s^t)$- 适应的，由命题 2.4 知 $J(t,x;v^{ij}(\cdot))(j=1,2,\cdots,N_i)$ 都是确定性的. 所以不失一般性我们可以假定

$$J(t,x;v^{i1}(\cdot))\geq J(t,x;v^{ij}(\cdot)),\ \forall i=2,\cdots,N_i.$$

由此立刻得 $J(t,x;v^{i1}(\cdot)) \geq J(t,x;v^i(\cdot))$, 从而 $\lim_i J(t,x;v^{i1}(\cdot)) = u(t,x)$. 故 $u(t,x)$ 也是确定性的. ∎

下面我们来讨论值函数 $u(t,x)$ 关于 x 的光滑性问题. 我们有下面的估计:

引理 5.2 对于任意的 $t\in[0,T]$,x 和 $x'\in \mathbb{R}^n$, 都有

$$\begin{array}{ll}\text{(i)} & |u(t,x)-u(t,x')|\leq C_0|x-x'|^\alpha,\\ \text{(ii)} & |u(t,x)|\leq C_0(1+|x|).\end{array} \tag{5.6}$$

证明 由 (5.5) 和估计 (5.4) 得，对于任意的容许控制 $v(\cdot)\in\mathcal{U}$ 有

$$\begin{array}{l}|J(t,x;v(\cdot))|\leq C_0(1+|x|);\\ |J(t,x;v(\cdot))-J(t,x';v(\cdot))|\leq C_0|x-x'|^\alpha.\end{array} \tag{5.7}$$

另外，由于对任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $v(\cdot)$ 和 $v'(\cdot)\in\mathcal{U}$, 使得

$$J(t,x;v(\cdot))\leq u(t,x)\leq J(t,x;v(\cdot))+\varepsilon,$$

$$J(t,x';v'(\cdot))\leq u(t,x')\leq J(t,x';v'(\cdot))+\varepsilon.$$

结合估计 (5.7) 有

$$-C_0(1+|x|)\leq J(t,x;v(\cdot))\leq u(t,x)\leq J(t,x;v(\cdot))+\varepsilon\leq C_0(1+|x|)+\varepsilon.$$

但 ε 可以取得任意小，由此证得 (5.6) 的 (ii). 同理有

$$J(t,x;v'(\cdot))-J(t,x';v'(\cdot))-\varepsilon \le u(t,x)-u(t,x') \\ \le J(t,x;v(\cdot))-J(t,x';v(\cdot))+\varepsilon,$$

从而

$$-C_0|x-x'|^\alpha-\varepsilon \le |u(t,x)-u(t,x')| \le C_0|x-x'|^\alpha+\varepsilon.$$

由此又得 (5.6) 的 (i). ∎

引理 5.3 给定 $t\in[0,T)$ 和 $\zeta\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P;\mathbb{R}^n)$. 对于任意的 $v(\cdot)\in\mathcal{U}$, 我们有

$$u(t,\zeta)\ge Y_t^{t,\zeta;v}. \tag{5.8}$$

反之，对任意 $\varepsilon>0$, 都存在一个容许控制 $v(\cdot)\in\mathcal{U}$, 使得

$$u(t,\zeta)\le Y_t^{t,\zeta;v}+\varepsilon, \quad \text{a.s.}. \tag{5.9}$$

证明 我们已知 u 关于 x 连续且 $Y_t^{t,\zeta;v}$ 关于 $(\zeta,v(\cdot))$ 连续，故欲证 (5.8), 只需讨论 ζ 是形如 (4.8) 式的简单函数，即

$$\zeta=\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i}x_i,$$

且 $v(\cdot)$ 是形如

$$v(\cdot)=\sum_{i=1}^N v_s^i\mathbf{1}_{A_i}v^i(\cdot)$$

的情况. 此处对于 $i=1,2,\cdots,N$, $x_i\in\mathbb{R}^n$,$v^i(\cdot)$ 是 $(\mathcal{F}_s^t)$- 适应的, $\{A_i\}_{i=1}^N$ 是 $(\Omega,\mathcal{F}_t)$ 的一个分割. 而这时我们就可以运用与证明定理 4.2 一样的方法得到

$$Y_t^{t,\zeta;v}=\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i}Y_t^{t,x^i;v^i}\le\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i}u(t,x_i)=u(t,\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i}x_i)=u(t,\zeta).$$

由此得 (5.8).

我们用类似的方法去证明 (5.9): 先构造以下形式的随机变量 $\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^n)$

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} x_s^i \mathbf{1}_{A_i},$$

使得

$$|\eta - \zeta| \le \left(\frac{\varepsilon}{3C_0}\right)^{1/\alpha},$$

其中 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 的一个分割, $x_i \in \mathbb{R}^n (i = 1.2, \cdots)$. 因而对于每一个 $v(\cdot) \in \mathcal{U}$, 几乎必然有

$$\begin{aligned} |Y_t^{t,\eta;v} - Y_t^{t,\zeta;v}| &\le \frac{\varepsilon}{3}, \\ |u(t,\zeta) - u(t,\eta)| &\le \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

然后对于每一个 x_i, 我们选一个 $(\mathcal{F}_s^t)$- 适应的容许控制 $v^i(\cdot)$, 使得

$$u(t, x_i) \le Y_t^{t,x^i;v^i} - \frac{\varepsilon}{3}.$$

记

$$v(\cdot) := \sum_{i=1}^{\infty} v^i(\cdot) \mathbf{1}_{A_i}. \tag{5.11}$$

则由 (5.10) 得

$$\begin{aligned} Y_t^{t,\zeta;v} \ge & -|Y_t^{t,\eta;v} - Y_t^{t,\zeta;v}| + Y_t^{t,\eta;v} \ge -\tfrac{\varepsilon}{3} + \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} Y_t^{t,x^i;v^i} \mathbf{1}_{A_i} \\ \ge & -\frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{\infty} (u(t,x_i) - \frac{\varepsilon}{3}) \mathbf{1}_{A_i} = -\frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{\infty} u(t,x_i) \mathbf{1}_{A_i} \\ = & -\frac{2\varepsilon}{3} + u(t,\eta) \ge -\varepsilon + u(t,\zeta). \end{aligned}$$

由此得 (5.9). ∎

现在我们来讨论 (推广的) 动态规划原理. 为此按 (3.13) 方式引入一族 (后退的) 半群. 给定初始条件 (t,x), 一个正数 $\delta \le T-t$, 及一个实值的随机变量 $\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t+\delta}, P; \mathbb{R})$, 我们记

$$\mathbf{G}_{t,t+\delta}^{t,x;v}[\eta] := Y_t, \tag{5.12}$$

其中 $(Y_s, Z_s)_{t\le s\le t+\delta}$ 是下面 BSDE 的解:

$$\begin{aligned} -dY_s = & \ f(s, X_s^{t,x;v}, Y_s, Z_s, v_s)ds - Z_s dW_s, \quad s \in [t, t+\delta], \\ Y_{t+\delta} = & \ \eta. \end{aligned}$$

很明显,

$$\mathbf{G}_{t,T}^{t,x;v}[\Phi(X_T^{t,x;v})] = \mathbf{G}_{t,t+\delta}^{t,x;v}[Y_{t+\delta}^{t,x;v}]. \tag{5.13}$$

我们的 (推广的) 动态规划原理是如下的

定理 5.4 值函数 $u(t,x)$ 具有以下性质: 对每一个 $0 \le \delta \le T-t$ 都有

$$u(t,x) = \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}_{t,t+\delta}^{t,x;v}[u(t+\delta, X_{t+\delta}^{t,x;v})]. \tag{5.14}$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned} u(t,x) = & \ \sup\nolimits_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}_{t,T}^{t,x;v}[\Phi(X_T^{t,x;v})] \\ = & \ \sup\nolimits_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}_{t,t+\delta}^{t,x;v}\left[Y_{t+\delta}^{X_{t+\delta}^{t,x;v}, t+\delta; v}\right] \end{aligned}$$

又由引理 5.3 及比较定理得

$$u(t,x) \le \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}_{t,t+\delta}^{t,x;v}[u(t+\delta, X_{t+\delta}^{t,x;v})].$$

另外, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个容许控制 $\overline{v}(\cdot) \in \mathcal{U}$ 使得

$$u(t+\delta, X_{t+\delta}^{t,x;v}) \le Y_{t+\delta}^{t+\delta; X_{t+\delta}^{t,x;v}; \overline{v}} + \varepsilon.$$

由此及比较定理得

$$\begin{aligned} u(t,x) \ & \ge \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}_{t,t+\delta}^{t,x;v}[u(t+\delta, X_{t+\delta}^{t,x;v}) - \varepsilon] \\ & \ge \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}_{t,t+\delta}^{t,x;v}[u(t+\delta, X_{t+\delta}^{t,x;v})] - C_0\varepsilon. \end{aligned}$$

但由于 ε 可以取得任意小. 从而 (5.14) 成立. ∎

我们已经在引理 5.2 中获得了值函数 $u(t,x)$ 关于 x 的 α-Hölder 连续性. 下面我们要通过这个结论以及动态规划原理来获得 u 关于 t 的连续性.

命题 5.5 值函数 u 关于 t 是 $\frac{\alpha}{2}$-Hölder 连续的.

证明 对于给定的 $(t,x)\in \mathbb{R}^n\times[0,T]$ 及 $\delta>0$, 由动态规划原理知, 对任意小的 $\varepsilon>0$, 存在 $v(\cdot)\in\mathcal{U}_t$ 使得

$$\mathbf{G}^{x,v}_{t,t+\delta}[u(t+\delta,X^{t,x;v}_{t+\delta})]+\varepsilon\geq u(t,x)\geq \mathbf{G}^{x,v}_{t,t+\delta}[u(t+\delta,X^{t,x;v}_{t+\delta})].$$

以下我们由上面的第一个 (第二个) 不等式关系来证明

$$u(t,x)-u(t+\delta,x)\leq C_1[\delta^{\frac{\alpha}{2}}+\delta^{\frac{1}{2}}](\text{相应地}, \geq -C_1[\delta^{\frac{\alpha}{2}}+\delta^{\frac{1}{2}}]\ ). \quad (5.15)$$

由此即知 u 关于 t 是 $\frac{\alpha}{2}$-Hölder 连续的.

我们只证明 (5.15) 的第一个不等式, 第二个的证明是相似的. 我们有

$$u(t,x)-u(t+\delta,x)\leq I^1_\delta+I^2_\delta+\varepsilon, \quad (5.16)$$

其中

$$\begin{aligned}I^1_\delta&=\mathbf{G}^{x,v}_{t,t+\delta}[u(t+\delta,X^{t,x;v}_{t+\delta})]-\mathbf{G}^{x,v}_{t,t+\delta}[u(t+\delta,x)],\\ I^2_\delta&=\mathbf{G}^{x,v}_{t,t+\delta}[u(t+\delta,x)]-u(t+\delta,x).\end{aligned}$$

我们来估计这两项. 应用定理 3.8 中的不等式 (iii), 且注意到 u 关于 x 是 α-Hölder 连续的, 就有

$$|I^1_\delta|\leq\left[C_0\mathbb{E}|u(t+\delta,X^{t,x;v}_{t+\delta})-u(t+\delta,x)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\leq\left[C_0\mathbb{E}|X^{t,x;v}_{t+\delta}-x|^{2\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由此及 $\mathbb{E}|X^{t,x;v}_{t+\delta}-x|^2\leq C\delta$ 有

$$|I^1_\delta|\leq C_1\delta^{\frac{\alpha}{2}}.$$

这里的常数 C_1 与控制 $v(\cdot)$ 无关. 由 $\mathbf{G}_{t,t+\delta}^{t,x;v}$ 的定义，第二项 I_δ^2 可以写作

$$\begin{aligned}I_\delta^2 =& \mathbb{E}\Big[u(t+\delta,x)+\int_t^{t+\delta} f(s,X_s^{t,x;v},Y_s^{t,x;v},Z_s^{t,x;v},v_s)ds \\ &+\int_t^{t+\delta} Z_s^{t,x;v}dW_s\Big]-u(t+\delta,x)\\ =&\mathbb{E}\Big[\int_t^{t+\delta}|f(s,X_s^{t,x;v},Y_s^{t,x;v},Z_s^{t,x;v},v_s)ds|\Big].\end{aligned}$$

从而应用 Schwarz 不等式得

$$|I_\delta^2| \le \delta^{\frac{1}{2}}\Big[\mathbb{E}\int_t^{t+\delta}|f(s,X_s^{t,x;v},Y_s^{t,x;v},Z_s,v_s)|^2ds\Big]^{\frac{1}{2}} \le C_1\delta^{\frac{1}{2}}.$$

由 (5.16) 得

$$u(t,x)-u(t+\delta,x)\le C_1(\delta^{\frac{3}{2}}+\delta^{\frac{1}{2}})+\varepsilon.$$

由于 ε 可以任意小. 所以 (5.15) 的第一个不等式成立. ∎

例 5.6 一个特殊情况是: f 与 (y,z) 无关, 即 $f=f(t,x,v)$. 此时对于每一个 $\eta\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_{t+\delta}^t,P;\mathbb{R})$, 有

$$\mathbf{G}_{t,t+\delta}^{t,x;v}[\eta]=\mathbb{E}\Big[\eta+\int_t^{t+\delta} f(s,X_s^{t,x;v},v_s)ds\Big].$$

由此及 (5.14) 即得经典的动态规划原理

$$u(t,x)=\sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}}\mathbb{E}\Big[u(t+\delta,X_{t+\delta}^{t,x;v})+\int_t^{t+\delta} f(s,X_s^{t,x;v},v_s)ds\Big].$$

§6. 非 Markov 系统的动态规划原理

我们现在考虑一个更复杂的情况：当假设 (H5.4) 不满足时的动态规划原理. 此时我们需要下面的引理：

引理 6.1 对于任给的 $\zeta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^n)$ 及两个容许控制 $v^1(\cdot)$ 和 $v^2(\cdot)$, 总存在一容许控制 $v(\cdot)$ 使下式成立：

$$J(t,\zeta;v(\cdot))(\omega) = \Big[J(t,\zeta;v^1(\cdot)) \vee J(t,\zeta;v(\cdot))\Big](\omega) \quad \text{a.s.}. \tag{6.1}$$

证明 记

$$A = \Big\{\omega \in \Omega;\ J(t,\zeta;v^1(\cdot)) \geq J(t,\zeta;v^2(\cdot))\Big\}. \tag{6.2}$$

由于 $A \in \mathcal{F}_t$, 因此可以用定理 4.2 证明中的方法推出

$$J\left(t,\zeta;v^1(\cdot)\mathbf{1}_A + v^2(\cdot)\mathbf{1}_{A^C}\right) = J\left(t,\zeta;v^1(\cdot)\right)\mathbf{1}_A + J\left(t,\zeta;v^2(\cdot)\right)\mathbf{1}_{A^C}.$$

由此及 A的定义知， 控制 $v(\cdot) = v^1(\cdot)\mathbf{1}_A + v^2(\cdot)\mathbf{1}_{A^C}$ 满足 (6.1). ∎

从 [Y] 中的定理 1.23 可推得如下的

引理 6.2 对于任给的 $\zeta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^n)$, 存在一个容许控制序列 $\overline{v}^j(\cdot), j = 1,2,\cdots$, 使得 $\{J(t,\zeta;\overline{v}^j(\cdot))(\omega)\}$ 是非降序列并且有

$$J(t,\zeta;\overline{v}^j(\cdot))(\omega) \uparrow \operatorname{esssup}_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} J(t,\zeta;v(\cdot))](\omega) \quad \text{a.s.}. \tag{6.3}$$

由以上引理我们可以给出如下的

定义 6.3 对于任给的 $\zeta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P\mathbb{R}^n)$ 我们定义

$$\Lambda(t,[\zeta]) := \operatorname{esssup}_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} J(t,\zeta;v(\cdot))(\omega). \tag{6.4}$$

由引理 6.2 知， $\Lambda(t,[\zeta])(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$- 可测的. Λ 有下面的正则性.

引理 6.4 对于任给的 $t\in[0,T],\zeta$ 及 $\overline{\zeta}\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P;I\!R^n)$, 我们有

$$\begin{array}{l}\text{(i) } |\Lambda(t,[\zeta])|\le C_0(1+|\zeta|);\\ \text{(ii) } |\Lambda(t,[\zeta])-\Lambda(t,[\overline{\zeta}])|\le C_0|\zeta-\overline{\zeta}|^{\alpha}.\end{array} \tag{6.5}$$

证明 由 (6.4)-(iii) 及 v_s 取值于有界集合 U 的假设知

$$\begin{aligned}|J(t,\zeta;v)| &\le |J(t,\zeta;0)|+|J(t,\zeta;v)-J(t,\zeta;0|\\ &\le |J(t,\zeta;0)|+C_0\int_t^T|v_s|^{2\alpha}ds.\le C_0(1+|\zeta|)+C_1.\end{aligned}$$

所以 (i) 成立.

现选序列 $\{v^i(\cdot)\}$ 和 $\{\overline{v}^i(\cdot)\}$ 使得

$$J(t,\zeta;v^i(\cdot))(\omega)\uparrow \mathrm{esssup}_{v(\cdot)\in\mathcal{U}}J(t,\zeta;v(\cdot))](\omega),$$

且

$$J(t,\overline{\zeta};\overline{v}^i(\cdot))(\omega)\uparrow \mathrm{esssup}_{v(\cdot)\in\mathcal{U}}J(t,[\overline{\zeta}];v(\cdot))](\omega),$$

由估计式 (5.4) 知, 对于每一个 $\overline{v}(\cdot)\in\mathcal{U}$,

$$|J(t,\zeta;\overline{v}(\cdot))-J(t,\overline{\zeta};\overline{v}(\cdot))|\le C_0|\zeta-\overline{\zeta}|^{\alpha}. \tag{6.6}$$

由 Λ 的定义有

$$J(t,\zeta;v^i\cdot))\le\Lambda(t,[\zeta])\le J(t,\zeta;v^i\cdot))+\eta_i(\omega)$$

及

$$J(t,\overline{\zeta};\overline{v}^i(\cdot))\le\Lambda(t,[\overline{\zeta}])\le J(t,\overline{\zeta};\overline{v}^i(\cdot))+\overline{\eta}_i(\omega),$$

其中 η_i 和 $\overline{\eta}_i$ 都一致有界并且 $\eta_i\downarrow 0,\overline{\eta}_i\downarrow 0$. 由此得

$$\begin{aligned}J(t,\zeta;\overline{v}^i(\cdot))-J(t,\overline{\zeta};\overline{v}^i(\cdot))-\overline{\eta}_i &\le \Lambda(t,[\zeta])-\Lambda(t,[\overline{\zeta}])\\ &\le J(t,\zeta;v^i(\cdot))-J(t,\overline{\zeta};v^i(\cdot))+\eta_i,\end{aligned}$$

从而

$$-C_0|\zeta-\overline{\zeta}|-\overline{\eta}_i\le|\Lambda(t,[\zeta])-\Lambda(t,[\overline{\zeta}])|\le C_0|\zeta-\overline{\zeta}|+\eta_i.$$

因此 (6.5)-(ii) 成立. ∎

我们现在可以定义值函数 u 如下

$$u(t,x) := \Lambda(t,[x]).$$

注意，由于没有假设 (H5.4), 所以 $u(x,\cdot)$ 一般是一个 $(\mathcal{F}_t)$- 适应的过程. 我们有如下的

引理 6.5 对于任意的 $\zeta \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P;\mathbb{R}^n)$, 以下关系式成立:

$$\Lambda(t,[\zeta])(\omega) = u(\zeta(\omega),t,\omega), \qquad \text{a.s.} \tag{6.7}$$

证明 由 (6.5) 知，对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意的 x, x',

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ \ |u(t,x)| \le C_0(1+|x|);\\ &\text{(ii)}\ \ |u(t,x)-u(t,x')| \le C_0|x-x'|^{\alpha}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

因而只需对 ζ 具有 (4.8) 的形式 $(\zeta = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{1}_{A_i})$ 的情况来证明 (6.7). 对于 $1 \le i \le N$, 设 $v_{ij}(\cdot)(j=1,2,\cdots)$ 为一容许控制列，使得当 $j\to\infty$ 时

$$J(t,x_i;v_{ij})(\cdot)) \uparrow u(t,x_i).$$

由 Λ 和 u 的定义且利用与定理 4.7 的证明中类似的方法得

$$\begin{aligned}\Lambda(t,\zeta) &\ge J\Big(t,\sum_{i=1}^N x_i\mathbf{1}_{A_i};\sum_{i=1}^N v_{ij}(\cdot)\mathbf{1}_{A_i}\Big) = \sum_{i=1}^N J(t,x_i;v_{ij}(\cdot))\mathbf{1}_{A_i}\\ &\uparrow \sum_{i=1}^N u(t,x_i)\mathbf{1}_{A_i} = u(t,\zeta).\end{aligned}$$

从而就有 $\Lambda(t,[\zeta]) \ge u(t,\zeta)$.

反之，对于任意的容许控制 $v(\cdot)$, 我们记 $v_i(\cdot) = v(\cdot)\mathbf{1}_{A_i}$, 就有

$$\begin{aligned}J(t,\zeta;v(\cdot)) &= J\Big(t,\sum_{i=1}^N x_i\mathbf{1}_{A_i};\sum_{i=1}^N v_i(\cdot)\mathbf{1}_{A_i}\Big) = \sum_{i=1}^N J(t,x_i;v_i(\cdot))\mathbf{1}_{A_i}\\ &\le \sum_{i=1}^N u(t,x_i)\mathbf{1}_{A_i} = u(t,\zeta).\end{aligned}$$

由此便知 $u(t,\zeta) \geq \Lambda(t,[\zeta])$. ∎

现在我们可以给出 (推广的) 动态规划原理了.

定理 6.6 值函数 $u(t,x)$ 满足以下性质: 对于任意的 $0 \leq \delta \leq T-t$, 都有

$$u(t,\zeta) = \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}^{t,\zeta;v}_{t,t+\delta}[u(t+\delta, X^{t,\zeta;v}_{t+\delta})]. \tag{6.9}$$

证明 由 u 和半群 $\mathbf{G}$ 的定义

$$\begin{aligned} u(t,\zeta) = & \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}^{t,\zeta;v}_{t,T}[\Phi(X^{t,\zeta;v}_T)] \\ = & \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}^{t,\zeta;v}_{t,t+\delta}[Y^{X^{t,\zeta;v}_{t+\delta},t+\delta;v}_{t+\delta}] \\ = & \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}^{t,\zeta;v}_{t,t+\delta}[J(t+\delta, X^{t,\zeta;v}_{t+\delta}; v(\cdot)]. \end{aligned}$$

又由引理 6.3 以及 $\mathbf{G}[\cdot]$ 的单调性 (比较定理) 得

$$u(t,\zeta) \leq \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}^{t,\zeta;v}_{t,t+\delta}[u(t+\delta, X^{t,\zeta;v}_{t+\delta})].$$

另一方面, 存在一个容许控制序列 $v^i(\cdot) \in \mathcal{U}$ 使得

$$u(t+\delta, X^{t,\zeta;v}_{t+\delta}) - J(t+\delta, X^{t,\zeta;v}_{t+\delta}; v^i(\cdot)) = \eta_i \downarrow 0,$$

其中 $\eta_i(\omega)$ $i=1,2,$ 是一致有界的随机变量列. 由此及 $\mathbf{G}[\cdot]$ 的连续性得

$$\begin{aligned} u(t,\zeta) &= \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}^{t,\zeta;v}_{t,t+\delta}[u(t+\delta, X^{t,\zeta;v}_{t+\delta}) - \eta_i] \\ &\geq \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}^{t,\zeta;v}_{t,t+\delta}[u(t+\delta, X^{t,\zeta;v}_{t+\delta})] - \overline{\eta}_i, \end{aligned}$$

其中 $\overline{\eta}_i(\omega) \downarrow 0$ 且一致有界. 从而知 (6.9) 成立. ∎

§7. 推广的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程的粘性解

正如经典情形一样，上一节引入的值函数 u 可通过一个全非线性偏微分方程解出：这个方程就是下面的 (推广的)Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

$$\partial_t u + H(D^2u, Du, u, x, t) = 0, \tag{7.1}$$

并有终端条件

$$u(x, T) = \Phi(x), \tag{7.2}$$

其中 Du 和 D^2u 分别表示 u 的梯度和 u 的 Hessian 矩阵，而推广的 Hamilton 函数 $H = H(A, p, r, x, t)$ 是定义在 $S^n \times R^n \times I\!R \times I\!R^n \times [0, T]$ 上的实函数 (其中 S^n 是 $n \times n$ 对称阵全体):

$$H = \sup_{v\in U}\Big\{\frac{1}{2}Tr(\sigma(t,x,v)\sigma^*(t,x,v)A) + \langle p, b(x,v,t)\rangle + f(r, \sigma^*(x,v,t)p, x, v, t)\Big\}.$$

(7.1) 是一个二阶全非线性抛物型偏微分方程. 注意这里的函数 H 较通常的 Hamilton 函数有一个实质的推广：一般而言，它关于 p 和 u 不再是凸的了. 有时为方便计我们直接将 (7.1) 写为

$$\partial_t u + \sup_{v\in U}\{\mathcal{L}(t,x,v)u + f(u, \sigma^*(t,x,v)Du, x, v, t)\} = 0,$$

其中 $\mathcal{L}$ 是如下的以 $v \in U$ 为参数的二阶线性偏微分算子族:

$$\mathcal{L}(t,x,v)\varphi = \frac{1}{2}Tr\left[\sigma(t,x,v)\sigma^*(t,x,v)D^2\varphi\right] + \langle D\varphi, b(t,x,v)\rangle.$$

注意到我们并不假定 σ 是非退化的. 本节将通过由 Crandall 和 Lions 在 [CL] 中及 Lions 在 [L] 中引入的著名的粘性解的概念来证明，值函数 u 就是 HJB 方程 (7.1) 的在终端条件 (7.4) 下的粘性解. 这一结果是由 Peng 在 [P8] 中获得的，其证明思想基于我们前一节获得的推广的动态规划原理和 BSDE 的概念.

另一方面，我们知道，(7.1) 和 (7.2) 的在粘性解意义下的唯一性已经解决．它实际上是 [GIL] 中的一个更一般的结果的特例，从而也就解决了这类方程的解的存在唯一性问题．

注 7.1 一个特例是当 b, σ 及 f 都不含控制变量 v 的情况．这时推广的 HJB 方程 (7.1) 就是一个拟线性二阶抛物性偏微分方程．但是存在性结果仍然是非平凡的．

我们引入 (7.1) 的粘性解的概念 (见 [CL])．记 $\varphi \in C_b^3([0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ 为 (t,x) 的三阶有界连续可微 (即直到三阶导数都有界) 实函数全体．

定义 7.2 我们称一个定义于 $(0,T) \times \mathbb{R}^n$ 上的连续实函数 u 为 (7.1) 的一个粘性下 (上) 解，如果对于所有的 $\varphi \in C_b^3([0,T] \times \mathbb{R}^n)$，及对于每一个 $\varphi - u$ 的最小 (最大) 点 (t,x) 都有

$$\partial_t \varphi(t,x) + H(D^2\varphi(t,x), D\varphi(t,x), \varphi(t,x), x, t) \geq 0 \tag{7.3}$$

$$(\ \partial_t \varphi(t,x) + H(D^2\varphi(t,x), D\varphi(t,x), \varphi(t,x), x, t) \leq 0\ ). \tag{7.4}$$

称 u 为 (7.1) 的粘性解，如果 u 同时是 (7.1) 粘性下解和粘性上解．

在 §3 我们已经证明了值函数 u 在 $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ 上是连续的．以下我们来证明这个值函数 $u(t,x)$ 就是 (7.1) 的粘性解．以下就是存在性定理．

定理 7.3 设条件 (H5.1)—(H5.3) 满足．则由 (5.5) 定义的值函数 $u(t,x)$ 就是 HJB 方程 (7.1) 满足终端条件 (7.2) 的解．

为证明此定理，我们要引入以下三个引理．我们记

$$\begin{aligned} F(y,z,x,v,s) = \partial_t \varphi(x,s) + \mathcal{L}(x,v)\varphi(x,s) + f(y + \varphi(x,s), z \\ + D\varphi(x,s)\sigma(x,v), x, v), \end{aligned} \tag{7.5}$$

并且考虑定义于一个区间 $[t, t+\delta]$ 上的 BSDE

$$\begin{aligned} -dY_s^{1,v} &= F(Y_s^{1,v}, Z_s^{1,v}, X_s^{t,x}, v_s, s)ds - Z_s^{1,v} dW_s, \\ Y_{t+\delta}^{1,v} &= 0, \end{aligned} \tag{7.6}$$

其中 $(X_s^{t,x})$ 在上节给出.

第一个引理是

引理 7.4 对于每一个 $s\in[t,t+\delta]$, 以下关系式成立:

$$Y_s^{1,v}=\mathbf{G}_{s,t+\delta}^{t,x;v}[\varphi(X_{t+\delta}^{t,x},t+\delta)]-\varphi(X_s^{t,x},s),\quad \text{a.s.}. \tag{7.7}$$

证明 注意到 $\mathbf{G}_{s,t+\delta}^{t,x;v}[\varphi(X_{t+\delta}^{t,x},t+\delta)]$ 是通过 BSDE

$$\begin{aligned}-dY_s^v=&\quad f(Y_s^v,Z_s^v,X_s^{t,x},v_s,s)ds-Z_s^vdW_s,\ s\in[t,t+\delta],\\ Y_s^v=&\quad \varphi(X_{t+\delta}^{t,x},t+\delta)\end{aligned}$$

的解来定义的:

$$\mathbf{G}_{s,t+\delta}^{t,x;v}[\varphi(X_{t+\delta}^{t,x},t+\delta)]=Y_s^v,\quad s\in[t,t+\delta]. \tag{7.8}$$

因而只需要证明 $Y_s^v-\varphi(X_s^{t,x}),s\equiv Y_s^{1,v}$ 即可. 对 $\varphi(X_s^{t,x},s)$ 应用 Itô 公式, 易证 $d(Y_s^v-\varphi(X_s^{t,x},s))=dY_s^{1,v}$, 并且在终端时刻 $t+\delta$, $Y_{t+\delta}^v-\varphi(X_{t+\delta}^{t,x},t+\delta)$ 和 Y^v 都等于 0, 从而它们在区间 $[t,t+\delta]$ 上是相等的. ∎

以下看一个比 (7.6) 还要简单的 BSDE, 即将 (7.6) 中的 $X_s^{t,x}$ 换为 x

$$\begin{aligned}-dY_s^{2,v}=&\quad F(Y_s^{2,v},Z_s^{2,v},x,v_s,s)ds-Z_s^{2,v}dW_s,\\ Y_{t+\delta}^{2,v}=&\quad 0.\end{aligned} \tag{7.9}$$

下面的引理表明, 当 δ 充分小的时候, 它们的解的差 $|Y_t^{1,v}-Y_t^{2,v}|$ 可以忽略.

引理 7.5 我们有如下的估计:

$$|Y_t^{1,v}-Y_t^{2,v}|^2\le C\delta\rho_1(\delta), \tag{7.10}$$

其中当 $\delta\downarrow 0$ 时, $\rho_1(\delta)\downarrow 0$, 并且 $\rho(\cdot)$ 与控制 $v(\cdot)$ 无关.

证明 首先注意到 b 和 σ 满足以下的线性增长条件: $|b(x,v)|+|\sigma(x,v)|\le C(1+|x|)$, 从而易知, 对于任意的 $p\ge 2$,

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[t,T]}|X_s^{t,x}|^p\le C(1+|x|^p).$$

将其与

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[t,t+\delta]}|X_s^{t,x}-x|^2 \le 2\sup_{s\in[t,t+\delta]}\left|\int_t^s b(X_r^{t,x},v_r)dr\right|^2 + 2\sup_{s\in[t,t+\delta]}\left|\int_t^s \sigma(X_r^{t,x},v_r)dW_r\right|^2$$

结合得

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[t,t+\delta]}|X_s^{t,x}-x|^2 \le C\delta.$$

因而当 $\delta\downarrow 0$ 时，下面的随机变量

$$\eta^\delta = \sup_{s\in[t,t+\delta]}|X_s^{t,x}-x|$$

单调收敛于 0.

对于 BSDE(7.6) 和 (7.9) 应用估计 (2.7), 令其中 $\xi^1=\xi^2=0$,

$$f(s,y,z)=F(y,z,X_s^{t,x},s),$$
$$\varphi_s^1=0,\ \varphi_s^2=F(y,z,X_s^{t,x},v_s,s)-F(y,z,x,v_s,s).$$

易知这个 f 关于 (y,z) 是 Lipschitz 的, 并且 φ_s^2 被 $C\rho(|X_s^{t,x}-x|)$ 所界, 这里当 $d\downarrow 0$ 时 $\rho(\alpha)\downarrow 0$, 并且对所有的 $\varepsilon\ge 0$,$\rho(\varepsilon)\le C(1+\varepsilon^q)$, 我们有以下的估计

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_t^{t+\delta}[|Y_s^{1,v}-Y^{2,v}|^2+|Z_s^{1,v}-Z_s^{2,v}|^2]ds\\&\le C\mathbb{E}\int_t^{t+\delta}\rho(|X_s^{t,x}-x|)^2ds\le C\delta\mathbb{E}\rho(\eta^\delta)^2.\end{aligned}\tag{7.11}$$

另一方面，由于 $Y_t^{1,v}$ 和 $Y_t^{2,v}$ 都是确定性的数，因而有

$$\begin{aligned}&|Y_t^{1,v}-Y_t^{2,v}|=|\mathbb{E}(Y_t^{1,v}-Y_t^{2,v})|\\&=\left|\mathbb{E}\int_t^{t+\delta}[F(X_s^{t,x},Y_s^{1,v},Z_s^{1,v},v_s,s)-F(x,Y_s^{2,v},Z_s^{2,v},v_s,s)ds\right|\\&\le\mathbb{E}\int_t^{t+\delta}[\rho(|X_s^{t,x}-x|)+C|Y_s^{1,v}-Y_s^{2,v}|+C|Z_s^{1,v}-Z_s^{2,v}|]ds\\&\le\delta\mathbb{E}\rho(\eta^\delta)+C\delta^{\frac12}\cdot\left\{\mathbb{E}\int_t^{t+\delta}(|Y_s^{1,v}-Y_s^{2,v}|^2+|Z_s^{1,v}-Z_s^{2,v}|^2)ds\right\}^{\frac12}.\end{aligned}$$

由此得

$$|Y_t^{1,v} - Y_t^{2,v}| \le C_1\delta[\mathbb{E}\rho(\eta^\delta) + \{\mathbb{E}\rho(\eta^\delta)^2\}^{\frac{1}{2}}]. \tag{7.12}$$

将其与 (7.11) 结合并注意到以下事实：对于每一个 $\delta > 0$, $\rho(\eta^\delta)$ 平方可积，从而证得 (7.10). ∎

我们还要给出计算 $\sup_{v(\cdot)} Y_t^{2,v}$ 的方法.

引理 7.6 我们有

$$\sup_{v(\cdot)} Y_t^{2,v} = Y_0(t). \tag{7.13}$$

其中 $Y_0(\cdot)$ 为下面的常微分方程的解：

$$\begin{aligned} &-\dot{Y}_0(s) = F_0(x, Y_0(s), 0, s), s \in [t, t+\delta], \\ &Y_0(t+\delta) = 0. \end{aligned} \tag{7.14}$$

而函数 F_0 由下式定义：

$$F_0(x,y,z,t) \equiv \sup_{v \in U} F(x,y,z,t). \tag{7.15}$$

证明 由 F_0 的定义知

$$F_0(x,y,z,s) \ge F(x,y,z,v_s,s), \quad \forall v(\cdot) \in \mathcal{U}, \forall x,y,z,t.$$

由 **G** 的单调性知，对于任意的 $v(\cdot) \in \mathcal{U}$ 都有

$$Y_s^{2,v} \le Y_s^0, \quad s \in [t, t+\delta], \tag{7.16}$$

其中 (Y^0, Z^0) 是下面的 BSDE 的解：

$$\begin{aligned} &-dY_s^0 = F_0(x, Y_s^0, Z_s^0, s)ds - Z_s^0 dW_s, \quad s \in [t, t+\delta], \\ &Y^0(t+\delta) = 0. \end{aligned} \tag{7.17}$$

注意到 F_0 是 (x,y,z,t) 的确定性的函数, 从而 (见注 2.5) $(Y_s^0, Z_s^0) \equiv (Y_0(s), 0)$. 而 Y_0 是常微分方程

$$\begin{aligned} &\dot{Y}_0(s) = F_0(x, Y_0(s), 0, s), \quad s \in [t, t+\delta], \\ &Y_0(t+\delta) = 0 \end{aligned}$$

的解，因而如能证明

$$Y_0(t) = \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}_0} Y_t^{2,v}, \tag{7.18}$$

则定理就得证了. 上式中的 $\mathcal{U}_0$ 表示确定性的容许控制全体. 我们将这一点的证明留给读者. 请注意到对于每一个 $v(\cdot)\in\mathcal{U}_0$, $Y^{2,v}$ 是下面的常微分方程的解：

$$\begin{aligned} &-\dot{Y}^{2,v}(s) = F(x, Y^{2,v}(s), 0, v(s), s), \quad s\in[t, t+\delta], \\ &Y^{2,v}(t+\delta) = 0. \end{aligned} \tag{7.19}$$

引理证毕. ∎

下面我们可以给出

定理 7.1 的证明 设 $\varphi\in C_b^3(I\!R^n\times[0,T])$ 且 (t,x) 是 $\varphi-u$ 的一个最小 (最大) 点. 并且 $\varphi(t,x)=u(t,x)$. 由动态规划原理 (5.4) 得

$$\varphi(t,x) = u(t,x) = \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{G}_{t,t+\delta}^{t,x;v}[u(X_{t+\delta}^{t,x}, t+\delta)].$$

由 $\varphi\geq u$ (相应地, $\varphi\leq u$) 以及 $\mathbf{G}$ 的单调性有

$$\sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}}\left\{\mathbf{G}_{t,t+\delta}^{t,x;v}[\varphi(X_{t+\delta}^{t,x}, t+\delta)] - \varphi(t,x)\right\}\geq 0 \quad (\text{相应地}, \leq 0).$$

或由 (7.7),

$$\sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} Y_t^{1,v}\geq 0 \quad (\text{相应地}, \leq 0).$$

由此及 (7.10) 推得

$$\sup_{v(\cdot)\in\mathcal{U}} Y_t^{2,v}\geq -\delta\rho(\delta) \quad (\text{相应地}, \leq \delta\rho(\delta)).$$

因而由引理 7.6 得

$$Y_0(t)\geq -\delta\rho(\delta) \quad (\text{相应地}, \leq \delta\rho(\delta)).$$

于是

$$F_0(x,0,0,t)=\sup_{v\in U}F(x,0,0,v,t)\geq 0\quad (\text{相应地},\ \leq 0).$$

由 F 的定义即知 u 是 HJB 方程 (7.1) 的粘性下解 (上解), 从而是 (7.1) 的粘性解. ∎

§ 8. g- 期 望

我们在本节介绍一个推广了的数学期望 (g- 期望) 的概念. 这种 g- 期望保持了一般的数学期望的除了线性性以外的几乎所有的性质. 本节的结果的证明见 [P12,P13]. 为了简明起见, 我们将仅限于在以下的随机变量的空间里进行讨论. 令

$$L_0^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R})=\bigcup_{0\leq n<\infty}L^2(\Omega,\mathcal{F}_n,P;\mathbb{R}).$$

显然 $L_0^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R})$ 是一内积空间. 本节用 X 表示 $L_0^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R})$ 中的元素.

设 g 给定如下:

$$g(y,z,\cdot):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}.$$

我们假定 g 关于 (y,z) 为一致 Lipschitz 的:

$$|g(y,z,t)-g(y',z',t)|\leq\mu(|y-y'|+|z-z'|),\tag{8.1}$$

并且对于每一个 $T>0$ 和 $(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$,$g(y,z,\cdot)$ 是 $(\mathcal{F}_t)$- 循序可测的. 我们还假设

$$g(y,0,\cdot)\equiv 0,\qquad \forall y\in\mathbb{R}.\tag{8.2}$$

注意这个假设等价于: $\forall A\in\mathcal{F},\forall(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,

$$g(y1_A,z1_A,\cdot)\equiv g(y,z1_A,\cdot)\equiv 1_Ag(y,z,\cdot),\tag{8.2-1}$$

满足以上诸条件的 g 的一个典型的 (非线性的) 例子是

$$g = k_s|z|, \tag{8.3}$$

其中 (k_s) 是一个 $(\mathcal{F}_t)$- 循序可测的有界随机过程.

对于任何一个给定的 $X \in L_0^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ 和 $t \geq 0$, 我们引进下面的 X 的相应于 g 的 "g- 期望" 以及与之相应的 $\mathcal{F}_t$ 条件下的 " g- 条件期望" 的概念. 设 $T \in [0, \infty)$ 为使得 X 是 $\mathcal{F}_T$- 可测的. 这时 $[0, T]$ 上的 BSDE

$$-dy_s = g(y_s, z_s, s)ds - z_s dW_s \tag{8.4-1}$$

的满足终端条件

$$y_T = X \tag{8.4-2}$$

的解是有定义的:

$$(y_t, z_t)_{0 \leq t \leq T} \in L_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}) \times L_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^d).$$

注意到 y_0 是一个随 X 变化的确定的数, 我们因而可以引进如下的

定义 8.1 对于每一个 $X \in L_0^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$, 我们称

$$\mathcal{E}_g[X] := y_0$$

为 X 的 g- 期望.

注 8.2 设 X 为 $\mathcal{F}_T$- 可测, 则对于任意的 $T_1 > T, X$ 也是 $\mathcal{F}_{T_1}$- 可测: $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{T_1}, P; \mathbb{R})$. 从而 $\mathcal{E}_g[X]$ 也可以由

$$\mathcal{E}_g[X] := y_0^1$$

来定义, 其中 $(y_t^1)_{0 \leq t \wedge T}$ 是如下 BSDE 的解:

$$\begin{cases} dy_s^1 = & -g(y_s^1, z_s^1, s)ds + z_s^1 dW_s, \qquad 0 \leq s \leq T_1, \\ y_{T_1}^1 = & X. \end{cases}$$

但是，由于假设 (8.2),$\mathcal{E}_g[\cdot]$ 的定义不会产生二义性. 实际上，容易验证

$$(y_t^1, z_t^1) = \begin{cases} (X, 0), & 若T < t \leq T_1, \\ \\ (y_t, z_t), & 若0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

从而 (y_t, z_t) 和 (y_t^1, z_t^1) 在 $[0, T]$ 上相同.

与普通数学期望相似，g- 期望 $\mathcal{E}_g[\cdot]$ 满足以下的性质：

引理 8.3 (i) 对任何常数 c, 都有 $\mathcal{E}_g[c] = c$, 特别地，$\mathcal{E}_g[0] = 0, \mathcal{E}_g[1] = 1$;

(ii) 如果 $X_1 \geq X_2$, a.s., 则 $\mathcal{E}_g[X_1] \geq \mathcal{E}_g[X_2]$; 此时 $\mathcal{E}_g[X_1] = \mathcal{E}_g[X_2]$, 当且仅当 $X_1 = X_2$, a.s.;

(iii) 对任意的 $T > 0$, 存在常数 C_T, 使得对于 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbb{R})$ 中任意 X_1 和 X_2 有

$$|\mathcal{E}_g[X_1] - \mathcal{E}_g[X_2]|^2 \leq C_T \mathbb{E}|X_1 - X_2|^2.$$

现在再引进随机变量 $X \in L_0^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 在 $\mathcal{F}_t$ 条件下的 g- 条件期望的概念. 与经典的情况相似，我们要找一个随机变量 $\eta \in L_0^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 它满足

$$\begin{aligned} &(\text{i})\ \eta是\mathcal{F}_t\text{- 可测的}: \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P); \\ &(\text{ii})\ 对于任意的A \in \mathcal{F}_t,\ \mathcal{E}_g[1_A X] = \mathcal{E}_g[1_A \eta]. \end{aligned} \tag{8.5}$$

事实上，我们有

命题 8.4 任给 $X \in L_0^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 存在唯一的 $\eta \in L_0^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 满足 (8.5) 中的条件 (i) 和 (ii). 而这个 η 实际上就是 BSDE(8.4) 的解在时刻 t 的值 y_t.

定义 8.5 我们称满足 (8.5)(i) 和 (ii) 的随机变量 η 为 X 的 $\mathcal{F}_t$ 条件下的 g- 条件期望. 且记为 $\mathcal{E}_g[X|\mathcal{F}_t] := \eta$.

g- 条件期望保持了 (除线性性外的) 经典意义下的条件数学期望的性质：

引理 8.6 (i) 当 X 是 $\mathcal{F}_t$- 可测时有

$$\mathcal{E}_g[X|\mathcal{F}_t] \equiv X.$$

特别地,

$$\mathcal{E}_g[0|\mathcal{F}_t] \equiv 0 \text{ 且} \mathcal{E}_g[1|\mathcal{F}_t] \equiv 1;$$

(ii) 对任意的 t 和 r 都有

$$\mathcal{E}_g[\mathcal{E}_g[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_r] = \mathcal{E}_g[X|\mathcal{F}_{t\wedge r}];$$

(iii) 若 $X_1 \geq X_2$ 则

$$\mathcal{E}_g[X_1|\mathcal{F}_t] \geq \mathcal{E}_g[X_2|\mathcal{F}_t].$$

并且如果进一步还假设 $\mathbb{P}(X_1 > X_2) > 0$, 则

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_g[X_1|\mathcal{F}_t] \geq \mathcal{E}_g[X_2|\mathcal{F}_t]) > 0.$$

(iv) 对于任意的 $B \in \mathcal{F}_t$,$\mathcal{E}_g[1_B X|\mathcal{F}_t] = 1_B\mathcal{E}_g[X|\mathcal{F}_t]$.

注 8.7 现代经济学理论中实际上也以 "确定性等价" (certainty equivalent) 的形式 (见 Duffie & Epstein [DE]) 提出了一类非线性数学期望. 但这一类确定性等价不具有像我们这里引入的 g- 期望那样好的数学性质, 因而很难被用于处理经济领域里的随时间变化的随机现象. 另外, 在对重要的 "风险厌恶" 问题的刻画方面也不像 g- 期望那样灵活自如.

下面简单的例子提示我们如何利用 g- 期望来刻画和处理 "风险厌恶" 问题.

例 8.8 如果我们进一步假设

$$g(y, z, s) \leq 0, \quad \forall (y, z, s), \tag{8.6}$$

则有

$$\mathcal{E}_g[X|\mathcal{F}_t] \leq \mathcal{E}_g[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]. \tag{8.7}$$

特别当 $t=0$ 时，

$$\mathcal{E}_g[X] \leq \mathcal{E}_g[\mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X]. \tag{8.8}$$

例 8.9 g- 期望的一个很简单的例子是当

$$g = b_s \cdot z$$

的情形. 其中 $(b_s)_{0\leq s<\infty}$ 是一个一致有界的 $(\mathcal{F}_t)$- 适应过程. 若 X 是 $\mathcal{F}_T$- 可测的，则有

$$\mathcal{E}_g[X] = \mathbb{E}_Q[X],$$

其中 $\mathbb{E}_Q[\cdot]$ 是由

$$\mathbb{E}_Q[X] := \mathbb{E}[Q_T X]$$

定义的数学期望，而

$$Q_t := \exp[\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b_s|^2 ds].$$

由这个例子可见， g- 期望的概念推广了经典的 Girsanov 变换.

由引理 8.6(ii) 我们可以引入推广的鞅，即 g- 鞅的概念：

定义 8.10 称过程 $(X_t) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R})$ 是一个 (平方可积)g- 鞅 (相应地,g- 下鞅， g- 上鞅), 如果对每一个 $s \leq t \leq T$, 都有 $\mathcal{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ (相应地，$\leq X_s$,$\geq X_s$).

这种 g- 鞅的一个平凡情况是： $g \equiv \langle b_s, z\rangle$. 这时显然有 $\mathcal{E}_g[\cdot] = \mathbb{E}_Q[\cdot]$, $\mathcal{E}_g^{\mathcal{F}_t}[\cdot] = \mathbb{E}_Q^{\mathcal{F}_t}[\cdot]$, 其中

$$Q := \exp\left[\int_0^T b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |b_s|^2 ds\right].$$

由此知，它的确是鞅的概念的推广.

注 8.11 对于是否有相应的 g- 下鞅的 Doob-Meyer 分解定理的问题已由 Peng 在 [P13] 解决. 通常 σ- 代数流的情况下结果可

见文献 [CP]. 我们这里仅粗略地介绍其中的一个特例: $g = g(s, z)$ 时的情况. 此时的 g- 上鞅分解定理的形式与经典的 Doob-Meyer 分解定理相似: 一个满足适当条件的 g- 上鞅 Y 具有唯一的分解 $Y = M + A$ 其中 M 是 g- 鞅, 而 A 是一个增过程.

注 8.12 g- 下鞅的概念以及相应的 g- 下鞅的 Doob-Meyer 分解定理可应用于处理非完全市场的未定权益 (如期权) 的定价理论.

习题 8.13 构造一个非平凡的 g- 上鞅.

参考文献

[A] F. Antonelli, Backward-forward stochastic differential equations, Ann. Appl. Probab., 3(1993), 777—793.

[Bi] J. M. Bismut, An introductory approach to duality, in : Optimal Stochastic Control, SIAM Rev., 20(1978), 62—78.

[B] R. Buckdahn, Backwrad stochastic differential equations driven by a martingale, 1993(preprint).

[C] D. Chevance, Un algorithme alétoire pour la resolution numérique de certaines équation differentielles stochastiques retrogrades (preprint).

[CL] M.C. Crandall and P.L. Lions, Viscosity Solutions of Hamilton-Bellman-Jacobi Equations, Trans. Amer. Math. Soc., 227 (1983), 1—42.

[CK] J. Cvitanic and I. Karatzas, Hedging contingent claims with constrained portforlios, Ann. Appl. Probab., 3(1993), 652—681.

[D1] R. W. R. Darling, Martingales on non-compact manifolds : maximal inequalities and prescribed limits (preprint).

[D2] R. W. R. Darling, Constructing Gamma-martingales with prescribed limit using backward SDE. Ann. Probab., 23(1995), 1234—1261.

[DP] R. W. R. Darling and S. Peng, An useful nonlinear version of conditional expectation, 1994(preprint).

[DE] D. Duffie and L. Epstein, Stochastic differential utility, Econometrica, 60(1992), 353—394.

[DE] D. Duffie and L. Epstein, Asset pricing with stochastic differential utilities, Review of Financial Studies, 5(1992), 411–436.

[DGS] D. Duffie, P. Y. Geoffard and C. Skiadas, Efficient and equilibrium allocations with stochastic differential utility, J. Math. Econom., 23(1994), 133–146.

[DL] D. Duffie and P. L. Lions, PDE solutions of stochastic differential utility, J. Math. Econom., 21(1992), 577–606.

[DMY] D. Duffie, J. Ma and J. Yong, Black's consol rate conjecture, Ann. Appl. Probab., 5(1995), 356–382.

[EJ] N. El Karoui and M. Jeanblanc-Picqué, Optimization of consumption with labor income (preprint).

[EPQ] N. El Karoui, S. Peng and M.-C. Quenez, Backward stochastic differential in finance, Lab. Probab. Univ. Paris VI, 260(1994).

[EQ] N. El Karoui and M.-C. Quenez, Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market, SIAM J. Control and Optim., 33(1995), 29–66.

[G] P. Y. Geoffard, Discounting and optimizing (preprint).

[H] Y. Hu, Probabilistic interpretation of a system of quasilinear elliptic partial differential equations under Neumann boundary conditions, Stoch. Proc. Appl., 48(1993), 107–121.

[HP1] Y. Hu and S. Peng, Adapted solution of backward stochastic evolution Equation, Stochastic Analysis and Applications, 9(1991), 445–459.

[HP2] Y. Hu and S. Peng, Solution of forward-backward stochastic differential equations, Probab. Theory & Related Fields, 103 (1995), 273–283.

[I] H. Ishii, On uniqueness and existence of viscosity solution of fully nonlinear second-order PDEs, Comm. Pure & Appl. Math., 42(1989), 15–45.

[IL] H. Ishii and P. L. Lions, Viscosity solution of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations, J. Diff. Eqs., 83(1990), 26–78.

[LT] X. Li and S. Tang, Necessary condition for optimal control of stochastic systems with random jumps, to appear in SIAM Control.

[M] C. Ma, Market equilibrium with heterogeneous recursive utility maximizing agents, Economic Theory, 3(1993), 243–266.

[M] C. Ma, Intertemporal recursive utility in the presence of mixed Poinsson-Brownian uncertainty (preprint).

[M] C. Ma, Valuation of derivative securities with mixed Poisson -Brownian information and recursive utility (preprint).

[MPY] J. Ma, P. Protter and J. Yong, Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly — a four step scheme, Probab. Theory & Related Fields, 98(1994), 339—359.

[MY] J. Ma and J. Yong, Solvability of forward backward SDEs and the nodal set of Hamilton-Jaccobi-Bellman Equations, Chin. Ann. Math. Ser. B, 16(1995), 279—298.

[PP1] E. Pardoux and S. Peng, Adapted solution of a backward stochastic Differential equation, Systems and Control Letters, 14(1990), 55—61.

[PP2] E. Pardoux and S. Peng, Backward stochastic differential equations and Quasilinear parabolic partial differential equations, Lecture Notes in CIS, 176, 200—217, Springer-Verlag, 1992.

[PP3] E. Pardoux and S. Peng, Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear parabolic SPDEs, Probab. Theory & Related Fields, 98(1994), 209—227.

[PP] E. Pardoux and S. Peng, Some backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients (preprint).

[P1] S. Peng, A general stochastic maximum principle for optimal control problems, SIAM J. Cont., 28(1990), 966—979.

[P2] S. Peng, On Hamilton-Jacobi-Bellman equation with stochastic coefficients, in : Proceeding of the Annual Meeting on Control Theory and It's Applications, 1989.

[P3] S. Peng, A generalized Hamilton-Jacobi-Bellman equation, Lecture Notes in CIS, 184, Li & Yong eds.; 126—134, Springer-Verleg, Berlin, 1991.

[P4] S. Peng, Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations, Stochastics and Stoch. Reports, 37(1991), 61—74.

[P5] S. Peng, A nonlinear Feynman-Kac formula and applications, in : Proceedings of Symposium of System Sciences and Control Theory, Chen & Yong eds., 173—184, World Scientific, Singapore, 1992.

[P6] S. Peng, Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman Equations, SIAM Control, 30(1992), 284—304.

[P7] S. Peng, Document de Synthese Pour l'Habilitation a Diriger des Recherches, University de Provence, 1992.

[P8] S. Peng, A generalized dynamic programming principle and Hamilton-Jacobi-Bellmen equation, Stochastics and Stoch. Reports, 38(1992), 119–134.

[P9] S. Peng, New development in stochastic maximum principle and related backword stochastic differential equations, in : Proceedings of 31st CDC Conference, Tucson, 1992.

[P10] S. Peng, Backward stochastic differential equation and its application in optimal control, Appl. Math. & Optim., 27(1993), 125–144.

[P11] S. Peng, BSDE and exact controllability of stochastic control systems, Progress in Natural Scienses, 3(1994).

[P12] S. Peng, Backward SDE and related g-expectation (reprint).

[Pi1] J. Picard, Martingales on Riemannian manifolds with prescribed limits, J. Funct. Anal., 99(1991), 223–261.

[Pi2] J. Picard, Baricentres et martingales sur une variété, Ann. de l'IHP (to appear).

[Pr] F. Pradeilles, EDSR et equation K.P.P. (preprint).

[S] N. Saada, Thèse de Doctorat de Université de Paris-VI .

[SS] S. E. Shereve and H. M. Sonor, Optimal investment and consumption with transaction costs (preprint).

[So] R. Sowers, Short-time geometry of random heat kernels(preprint).

[T] S. Tang, Optimal control of stochastic systems in Hilbert space with random jumps, Ph.D Thesis, Fudan University, 1993.

[Y] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科技出版社，1981.

第三篇 流形上的随机分析与 Malliavin 变分理论[1)]

本篇的宗旨是介绍 Riemann 流形上的扩散过程与几何分析性质的相互渗透. 作者主要参考了 P. Malliavin 在加拿大 Montréal 大学的讲义 [M] 及 Ikeda-Watanabe 的书 [IW]. 对 Riemann 流形上的 Brown 运动的构造, 选择了 Malliavin 规范标架丛方法. 由于在规范标架丛上存在一组向量场, 它在每点的切空间上都构成基底, 所以它可以将流形上的任意张量数值化 (即取值于一固定的欧氏空间), 处理起来显得很方便. 另外, 关于 Brown 运动的鞅的刻画和 Schwartz- Meyer 二次微分计算, 由于篇幅的限制, 不可能加以介绍. 感兴趣的读者可参考 B. Driver 在苏黎世大学的讲稿 [Dr3] 及 M. Emery 的书 [E].

概率与几何、分析的相互作用的内容是非常丰富的, 可以说是最近二三十年随机分析研究的主旋律. 关于从各方面, 譬如随机微分几何、Malliavin 随机变分理论、大偏差及半经典逼近、Dirichlet 型等较为全面的阐述, 建议读者参考 1992 年初在巴黎举行的分析与概率圆桌会议的论文集 (Bulletin des Sciences Mathematiques, Vol.117,1993).

本篇共四章. 在第一章, 作者试图尽量系统地介绍微分几何的准备知识. 有些证明不太详细, 但列出了确切的参考资料. 介绍微分几何的书是很多的, 每个作者都有自己研究方向的侧重点,

---

1) 本篇是在 1995 年襄樊暑期学校讲稿的基础上形成的. 作者衷心感谢母校武汉大学的盛情邀请, 特别感谢文志英教授的支持和鼓励.

很难找到一本书能提供读者所需要的全部知识. 本章提供的粗线索可以避免读者沉浸在微分几何的海洋里. 第二章将介绍流形上的随机微分方程、极限定理、随机微分同胚流及微分同胚的 Jacobi 矩阵的计算. 极限定理在这里是很重要的, 它的证明很复杂, 然而它的应用却是简洁明了的, 其好处是充分地使用微分几何中的方法 (见 §6 中的计算). 另外一个基本概念是随机微分同胚流, 许多基本的微分计算都要借助于它来加以表达. 规范标架丛上的水平随机微分同胚流决定了流形上的 Brown 运动流, 我们对它的 Jacobi 矩阵给出了确切的计算. 第三章将介绍热方程、热半群、热半群的估计及其应用、 Brown 运动的分部积分公式和 Bismut 的热核梯度的计算. 作者选择了紧致的 Riemann 流形, 主要是为了避免许多冗长的技术处理 (见 [IW] 对一般情形的讨论). 我们将看到偏微分方程和扩散过程通过热半群而联系起来, 从而可以通过研究扩散过程的性质来讨论其对应微分算子的性质. Malliavin 随机变分计算就是一套适合于扩散过程的微分计算理论. 它不但可以讨论微分算子的亚椭圆性, 而且还可以进一步讨论其热核的渐近估计. 由于篇幅限制, 不可能给予详细的介绍, 这里主要讨论热半群的作用. 它可以用来证明和推广 Bochner 的上同调群的零化定理, 证明对数 Sobolev 不等式及建立 Brown 运动的分部积分公式, 也可用来讨论热核的性质. 最后一章 (第四章) 将简要介绍一点 Malliavin 随机变分计算非线性的版本以及最近几年发展起来的轨道空间上的随机分析.

第一章　微分几何的预备知识

本章的目的是简明扼要地介绍以后几章需要用到的微分几何的知识，并试图使读者对微分几何有一个系统的认识. 在介绍正式内容之前，我们先回顾一下欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 的结构：

1. 当 $\mathbb{R}^d$ 被看成是一个抽象集合时，它就是一般的点集；

2. 当 $\mathbb{R}^d$ 具有线性结构时，我们可以作线性变换，解线性方程组；

3. 当 $\mathbb{R}^d$ 具有内积结构时，我们可以作等距变换，正交投影，谱分解，以及引进拓扑；

4. 当 $\mathbb{R}^d$ 具有微分结构时，我们可以作微分计算，线性逼近.

简而言之，根据讨论对象的不同，可以分别赋予 $\mathbb{R}^d$ 不同的结构，以便进行研究和探讨. 本章的安排将依照下列顺序：

$$\text{微分流形} \longrightarrow \text{连络} \longrightarrow \text{Riemann 流形} \longrightarrow \text{标架丛}.$$

在微分流形上，我们可以讨论向量场和微分形式. 当流形具有连络的结构时，我们可以对向量进行平行移动，从而产生挠率和曲率的概念. 当流形具有 Riemann 结构时，我们可以定义光滑曲线的长度，从而可以进行变分计算.

一般地， Riemann 流形上的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 不能表达成两次李导数之和，即

$$\Delta \neq \sum_{i=1}^{d} A_i^2\ ,\ A_i\text{为 } M \text{ 上的向量场}.$$

因此，Itô 随机微分方程不能用来直接构造流形 M 上的 Brown 运动. 为克服这个缺陷，我们使用规范标架丛，因为在规范标架丛上存在一组向量场，在每点的切空间上都构成一个基底.

§1. 微分流形

通俗地说，微分流形是由一块块"欧氏空间"粘起来的．给定一个具有可数拓扑基的 Hausdorff 拓扑空间 M，我们称 M 为局部欧氏空间，如果对每个 $x \in M$，存在一个开邻域 U，它同胚于 $\mathbb{R}^d$ 中的一个开集．设 φ 为这样的同胚映射，如果 U 是连通的，则称 (U,φ) 为 x 的局部坐标．通常记 $(x_1,\cdots,x_i)$ 为 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的坐标．所谓 M 上的 微分结构 是指 M 上的一组局部坐标 $\mathcal{F}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha),\alpha\in\Lambda\}$，它具有如下性质：

(i) $M=\cup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha$；

(ii) $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}\;:\;\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\longrightarrow\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 是 C^∞ 映射；

(iii) $\mathcal{F}$ 是极大的，即对任意局部坐标 (U,φ) 如果 $\forall\alpha\in\Lambda$，$\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1}$ 和 $\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 都是 C^∞ 映射，则 $(U,\varphi)\in\mathcal{F}$．

注　拓扑同胚的局部欧氏空间可能具有不同的微分结构，如 Milnor 怪球 S^7 (见 Annals of Math., 64(1956), 399–405.).

例　设 $M=S^1=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ x_1^2+x_2^2=1\}$，令

$$
\begin{aligned}
U_1&=\{x\in S^1\,,\ x_2>0\}, & \varphi_1(x)&=x_1\ ;\\
U_2&=\{x\in S^1\,,\ x_2<0\}, & \varphi_2(x)&=x_1\ ;\\
U_3&=\{x\in S^1\,,\ x_1>0\}, & \varphi_3(x)&=x_2\ ;\\
U_4&=\{x\in S^1\,,\ x_1<0\}, & \varphi_4(x)&=x_2\ .
\end{aligned}
$$

则

(i) $\{U_1,U_2,U_3,U_4\}$ 构成 S^1 的一个开覆盖，且 $\varphi_1:U_1\longrightarrow(-1,1)$ 为同胚映射；

(ii) $U_1\cap U_4=\{x\in S^1:\ x_2>0且x_1<0\}$.

从而有 $\varphi_1(U_1\cap U_4)=(-1,0)$, $\varphi_4(U_1\cap U_4)=(0,1)$, 且

$\varphi_4\circ\varphi_1^{-1}\ :\quad \xi\longmapsto-\sqrt{1-\xi^2}$ 是 $(0,1)$ 到 $(-1,0)$ 上的 C^∞ 映射，

$$\varphi_1 \circ \varphi_4^{-1}: \quad \xi \longmapsto \sqrt{1-\xi^2} \text{ 是 } (-1,0) \text{ 到 } (0,1) \text{ 上的 } C^\infty \text{ 映射}.$$

于是 (U_1, U_2, U_3, U_4) 生成 S^1 的一个微分结构 $\mathcal{F}$.

定义 1.1 给定两个光滑流形 M 和 N, $f: M \to N$ 是一映射, 我们称 f 在 M 上是光滑的, 如果对 M 上任意局部坐标 (U,φ) 及 N 上任意局部坐标 (U,ψ), 复合函数 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ 是光滑的.

我们将用 $C^\infty(M)$ 表示 M 上实值光滑函数全体组成的空间.

§2. 切空间

我们将用方向导数来引进切空间的概念.

定义 2.1 给定一点 $x \in M$. 算子 V: $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ 称为在点 x 的 切向量, 如果

(i) $V(f+\lambda g) = V(f) + \lambda V(g)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(M)$,

(ii) $V(fg) = V(f)g(x) + f(x)V(g)$, $f, g \in C^\infty(M)$.

记 T_xM 为在点 x 的切向量的全体. 容易看出, T_xM 为一线性空间.

注 a) 在 (ii) 中, 令 $f = g = 1$, 则得 $V(1) = 0$.

b) 如果在 x 的一个邻域 U 内 $f = 0$, 则 $V(f) = 0$. 事实上, 取 $\varphi \in C^\infty(M)$, 使得 $\varphi(x) = 1$, 在 U^c 上 $\varphi = 0$, 则 $f\varphi = 0$. 由 (ii),

$$0 = V(f\varphi) = V(f)\varphi(x) + f(x)V(\varphi) = V(f).$$

令 (U,φ) 为 x 的一局部坐标, $f \in C^\infty(M)$ 记

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial}{\partial \xi_i}(f \circ \varphi^{-1})), \quad \xi = \varphi(x).$$

命题 2.2 对任意 $x_0 \in U$, 切空间 $T_{x_0}M$ 由 $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_d}\}$ 生成.

证明 首先容易验证 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 满足定义 2.1 中的两个条件，从而 $\frac{\partial}{\partial x_i}\in T_{x_0}M$. 反之，设 $V\in T_{x_0}M$. 任取 $f\in C^\infty(M)$, 记 $\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$, $\xi_0=\varphi(x_0)$. 应用 Taylor 公式于 $\tilde{f}$ 得

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) &+ \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_0)(\varphi_i(x)-\varphi_i(x_0)) \\
&+ \sum_{i,j} f_{ij}(x)\big(\varphi_i(x)-\varphi_i(x_0)\big)\big(\varphi_j(x)-\varphi_j(x_0)\big).
\end{aligned}
$$

由 V 的性质 (ii) 知

$$
V(f_{ij}\cdot\big(\varphi_i-\varphi_i(x_0)\big)\big(\varphi_j-\varphi_j(x_0)\big)=0,
$$

于是

$$
V(f)=\sum_{i=1}^{d}c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}.
$$

其中 $c_i=V(\varphi_i-\varphi_i(x_0))$. ▮

有了切空间的概念之后，便可以定义光滑映射的微分.

定义 2.3 设 $f: M\longrightarrow N$ 为一光滑映射， $x_0\in M$. f 在 x_0 的微分 $df(x_0)$ 为 $T_{x_0}M$ 到 $T_{f(x_0)}N$ 的线性映射，满足

$$
\big(df(x_0),V\big)(g)=V(g\circ f),\ \forall V\in T_{x_0}M,\ g\in C^\infty(N).
$$

如果 σ 为流形 M 上的光滑曲线，通常记

$$
\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}=d\sigma(\tau)\cdot\frac{d}{d\tau}\in T_{\sigma(\tau)}M .
$$

定义 2.4 线性算子 $X: C^\infty(M)\longrightarrow C^\infty(M)$ 称为 M 上的向量场，如果对任意 $x\in M$, $X_x\in T_xM$, 使得 $x\longmapsto X(f)(x)=X_x(f)$ 为 M 上的光滑函数. 我们记 M 上向量场的全体为 $\mathcal{X}(M)$.

定义 2.5 给定 $X\in\mathcal{X}(M)$, 一光滑曲线 $\sigma: I\longrightarrow M$ 称为向量场 X 的积分曲线，如果

$$
\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}=X_{\sigma(\tau)}\ ,\quad \forall\tau\in I.
$$

定理 2.6 假定 M 为一紧致流形， $X \in \mathcal{X}(M)$. 则对任意 $x \in M$, 存在光滑曲线 $\sigma: \mathbb{R} \longrightarrow M$, 使得

(i) $\sigma(0) = x$,

(ii) $\frac{d\sigma(t)}{dt} = X_{\sigma(t)}$, $\forall t \in R$.

此外，若记 $U_t(x) = \sigma(t)$, 则 U_t 为 M 上的微分同胚，满足

(iii) $U_{t+s} = U_t \circ U_s$.

证明 见 [W, p36]. ∎

注 当流形 M 为非紧致时，总存在包含原点的开区间 I 及积分曲线 $\sigma: I \longrightarrow M$. 容易验证，对给定 $X \in \mathcal{X}(M)$, 有

$$X(f)(x_0) = \left\{\frac{d}{d\tau} f\big(\sigma(\tau)\big)\right\}_{\tau=0} ,$$

其中 $\sigma(\tau)$ 是从 x_0 点出发的积分曲线.

定义 2.7 给定 $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, 定义 李括号 如下:

$$[X,Y](f) = X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big), \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

命题 2.8 李括号具有如下性质:

(i) $[fX, Y] = f[X,Y] - Y(f)X$, $\quad \forall f \in C^\infty(M)$;

(ii) $\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0, \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$.

证明 由定义可直接验证. ∎

§3. 微分形式

在微分几何中，对微分形式的处理比对向量场的处理要方便得多. 几何中许多深刻的结果都是以微分形式给出的，譬如 Stoks 公式， de Rham-Hodge 分解定理， Frobenius 定理等.

定义 3.1 M 上 k 次微分形式ω 是 $\mathcal{X}(M)$ 上的 k 重反对称线性映射，即

$$(X_1,\cdots,X_k)\longrightarrow\omega(X_1,\cdots,X_k):\mathcal{X}(M)\times\cdots\times\mathcal{X}(M)\longrightarrow C(M),$$

使得

$$\omega(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_k)=-\omega(X_1,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots,X_k).$$

记 T_x^*M 为 $T_x(M)$ 的对偶空间，$\{dx^1,\cdots,dx^d\}$为 $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_d}\}$ 的对偶基底：

$$dx^i(\frac{\partial}{\partial x_j})=\delta_{ij}\qquad(\text{Kronecker 记号}).$$

则在一局部坐标 (U,φ) 下， k 次微分形式可表述为

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\omega_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\ ,\omega_{i_1\cdots i_k}\in C^\infty(U),\tag{3.1}$$

其中 $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ 定义如下：任取 $X_1,\cdots,X_k\in\mathcal{X}(M)$, $X_\beta=\sum_{i=1}^d x_\beta^i\frac{\partial}{\partial x_i}$, 令

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}(X_1,\cdots,X_k)=\frac{1}{k!}\det\left(x_\beta^{i_\alpha}\right)_{1\le\alpha\le k,1\le\beta\le k}\Big),$$

这里 det 表示行列式.

记 $E^k(M)$ 为 M 上 k 次微分形式的全体， $E^\circ(M)=C^\infty(M)$, $E^*(M)$ 为 M 上微分形式的全体. 给定 $\omega_1\in E^k(M)$, $\omega_2\in E^l(M)$. ω_1 和 ω_2 之间的外积定义如下：

$$\begin{aligned}&\omega_1\wedge\omega_2(X_1,\cdots,X_k,X_{k+1},\cdots,X_{k+l})\\&=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\epsilon_\sigma\omega_1(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(k)})\omega_2(X_{\sigma(k+1)},\cdots,X_{\sigma(k+l)}),\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中 S_{k+l} 是 $\{1,\cdots,k+l\}$ 的置换群， ϵ_σ 为置换 σ 的符号.

定理 3.2 存在唯一的实线性映射 $d: E^*(M) \longrightarrow E^*(M)$满足:

(i) $dE^k(M) \subset E^{k+1}(M)$,$\forall k \geq 0$;

(ii) 若 $f \in C^\infty(M)$, 则 $df(X) = X(f)$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$;

(iii) $d \circ d = 0$;

(iv) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega \wedge d\omega_2$, $\forall \omega \in E^k(M), \omega_2 \in E^*(M)$.

证明 唯一性. 设 $(U, x^1, \cdots, x^d)$ 为 M 的一局部坐标系, 取一相对紧开子集 V 使得 $\bar{V} \subset U$. 任取 $\omega \in E^k(M)$, 记 ω_U 为 ω 在 U 上的限制, 则

$$\omega_U = \sum f_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \ , \ f_{i_1 \cdots i_k} \in C^\infty(U) \ .$$

将 $f_{i_1 \cdots f_k}$, $x^1, \cdots, x^d$ 扩展到整个流形上, 即令 $\psi_{i_1 \cdots i_k} \in C^\infty(M)$, $\varphi_i \in C^\infty(M)$ 使得在 V 上有

$$\psi_{i_1 \cdots i_k} = f_{i_1 \cdots i_k} \ , \ \varphi_1 = x^1 \ , \cdots \ , \ \varphi_d = x^d \ .$$

定义 $\theta \in E^k(M)$ 如下:

$$\theta = \sum \psi_{i_1 \cdots i_k} d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k} \ .$$

显见, $\theta_V = \omega_V$. 我们有

$$d\big(f(\theta - \omega)\big) = df \wedge (\theta - \omega) + fd(\theta - \omega) \ , \ \forall f \in C^\infty(M).$$

在上式中取 $f \in C^\infty(M)$, 满足在 V^c 上恒等于 0, 在 V 的某个紧子集上等于 1, 则得到

$$fd\theta = fd\omega \ .$$

于是

$$(d\theta)_V = (d\omega)_V \ .$$

由 (iii) 和 (iv),

$$d\theta = \sum d\psi_{i_1\cdots i_k} \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

容易看出

$$df_V = (df)_V \ , \forall f \in C^\infty(M) \ .$$

所以有

$$(d\theta)_V = \sum df_{i_1\cdots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \ .$$

于是

$$(d\omega)_V = d\omega_V = \sum df_{i_1\cdots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge x^{i_k} \ .$$

由上一表达式可知 d 是唯一确定的.

关于 d 的存在性, 我们将给出它一个整体定义. 设 $\omega \in E^k(M)$, 定义:

$$\begin{aligned}(k+1)d\omega(X_1,\cdots,X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i\cdot\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1})\\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+1}) \ ,\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $\hat{X}_i$ 表示在位置 X_i 空缺. 由 (ii) 和 (3.3) 可以验证 (i),(iii),(iV) (参阅 [He, p.21]). ∎

定义 3.3 给定两个微分流形 M,N, 设 Φ 为 M 到 N 的光滑映射. 对 $\omega \in E^k(N)$, 令

$$\begin{aligned}(\Phi^*\omega)_x(X_1,\cdots,X_k) = \omega_{\Phi(x)}(d\Phi(x)\cdot X_1,\cdots,d\Phi(x)\cdot X_k) \ ,\\ X_i \in \mathcal{X}(M).\end{aligned} \tag{3.4}$$

定理 3.4 我们有

$$\Phi^*(\omega_1\wedge\omega_2) = \Phi^*(\omega_1)\wedge\Phi^*(\omega_2), \ \omega_1 \in E^k(M), \ \omega_2 \in E^l(M) \ , \tag{3.5}$$

$$d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega) \ . \tag{3.6}$$

证明 记 $Y_i = d\Phi \cdot X_i$, 则

$$
\begin{aligned}
&\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, \cdots, X_k, X_{k+1}, \cdots, X_{k+l}) \\
&= (\omega_1 \wedge \omega_2)_\Phi(Y_1, \cdots, Y_k, Y_{k+1}, \cdots, Y_{k+l}) \\
&= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \epsilon_\sigma \omega_{1\Phi}(Y_{\sigma(1)}, \cdots, Y_{\sigma(k)}) \omega_{2\Phi}(Y_{\sigma(k+1)}, \cdots, Y_{\sigma(k+l)}) \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \{\epsilon_\sigma \Phi^*\omega_1(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(k)}) \\
&\quad \times \Phi^*\omega_2(X_{\sigma(k+1)}, \cdots, X_{\sigma(k+l)})\} \\
&= \Phi^*\omega_1 \wedge \Phi^*\omega_2(X_1, \cdots, X_k, X_{k+1}, \cdots, X_{k+l}) .
\end{aligned}
$$

于是 (3.5) 得证. 为证 (3.6) 式, 我们寻求 $\Phi^*\omega$ 在局部坐标下的形式. 设 $(U, x^1, \cdots, x^d)$ 和 $(V, y^1, \cdots, y^m)$ 分别为 M 和 N 的局部坐标系, 且 $\Phi(U) \subset V$. 于是 Φ 具有表达式:

$$
y^j = \varphi_j(x^1, \cdots, x^d), \quad 1 \le j \le m .
$$

取 $\omega \in E^k(N)$, 则

$$
\omega_V = \sum g_{i_1 \cdots j_k} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k} \ , g_{j_1 \cdots j_k} \in C^\infty(V).
$$

所以 $\Phi^*\omega$ 在 U 中的表达式为

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*\omega)_U &= \sum g_{j_1 \cdots j_k} \circ \Phi \cdot \Phi^*(dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge \Phi^*(dy^{j_k}) \\
&= \sum_{i_1 \cdots i_k} \sum_{j_1 \cdots j_k} g_{j_1 \cdots j_k} \circ \Phi \cdot \frac{\partial \varphi_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial \varphi_{j_k}}{\partial x_{i_k}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} .
\end{aligned}
$$

于是

$$
d(\Phi^*\omega)_U = \sum \frac{\partial g_{j_1} \cdots j_k}{\partial y^j} \circ \Phi \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \varphi_{j_k}}{\partial x^{i_k}} dx^i \wedge \cdot \wedge dx^{i_k}.
$$

另一方面,

$$
d\omega_V = \sum \frac{\partial g_{j_1 \cdots j_k}}{\partial y^j} dy^j \wedge dy^{j_1} \wedge \cdot \wedge dy^{j_k}.
$$

$$\Phi^*(d\omega_V) = \sum \frac{\partial g_{j_1\cdots j_k}}{\partial y^j} \circ \Phi \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \varphi_{j_k}}{\partial x^{i_k}} dx^i \wedge \cdot \wedge dx^{i_k}.$$

所以

$$\big(\Phi^*(d\omega)\big)_U = \Phi^*\big((d\omega)_V\big) = \Phi^*(d\omega_V) = d(\Phi^*\omega)_U = (d\Phi^*\omega)_U .$$

于是 (3.6) 式得证. ∎

§ 4. 仿射连络

取流形 M 上两个不同的点 x, y, 一般说来, $T_xM \neq T_yM$. 要对 M 上的向量场进行运算, 必须引进连络的概念.

定义 4.1 所谓 M 上的一个 仿射连络, 是指一种给定的运算规则 ∇, 它将每一向量场 $X \in \mathcal{X}(M)$ 对应于 $\mathcal{X}(M)$ 上的一个线性变换 ∇_X, 且它满足:

(i) $\qquad \nabla_{fX+Y} = f\nabla_X + \nabla_Y$,

(ii) $\quad \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$,

其中 $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

引理 4.2 设 U 为 M 的一开子集, 如果 X 或 Y 在 U 上恒等于零, 则在 U 上, $\nabla_X Y = 0$.

证明 不妨设在 U 上 $Y = 0$. 任取一点 $x \in U$, 则存在 $\varphi \in C^\infty(M)$, 使得 $f(x) = 0$, 且对任意的 $y \in U^C$, $f(y) = 1$. 于是 $fY = Y$ 且

$$\nabla_X Y = \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y ,$$

由此可见, $\nabla_X Y$ 在 x 点为零. ∎

根据以上引理, ∇ 在 U 上诱导一仿射连络 ∇_U. 现在取 U 为 M 的局部坐标邻域, $(x^1, \cdots, x^1)$ 为 U 上的局部坐标系, 则存在

$\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ 使得

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^d \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{4.1}$$

Γ_{ij}^k 称为 ∇ 的 Christoffel 系数.

下面我们将引入平行移动的概念. 设 $\gamma(t)(t \in I)$ 为 M 上一光滑曲线, $Y(t)$ 为沿 $\gamma(t)$ 的向量: $Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$. 假定它光滑地依赖于 $t \in I$. 取 J 为 I 的紧子区间, 使得 $t \mapsto \gamma(t)$ 在 J 上没有重点且 $\gamma(J)$ 包含在一局部坐标邻域 U 内. 那么, 存在 $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, 满足:

$$Y(t) = Y_{\gamma(t)}\,, \quad \frac{d\gamma(t)}{dt} = X_{\gamma(t)}\,,\ t \in J\,.$$

定义 4.3 给定 M 上一仿射连络 ∇. 我们称 $Y(t)(t \in J)$ 沿 γ 是平行的, 如果

$$(\nabla_X Y)_{\gamma(t)} = 0\,, \quad \forall t \in J\,. \tag{4.2}$$

下面, 我们说明上述定义与向量场 X, Y 的选取无关. 为此, 我们在局部坐标 $(U, x_1, \cdots, x_d)$ 中表达方程 (4.2). 记

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \quad Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}\,,$$

则

$$x_i(t) = x_i(\gamma(t))\,,\ X^i(t) = X^i(\gamma(t))\,,\ Y^i(t) = Y^i(\gamma(t))\,,\ t \in J,$$

且有 $X^i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}$. 由于在 U 上

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_{ij} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\right) \frac{\partial}{\partial x_k}\,,$$

所以

$$\frac{dY^k(t)}{dt}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\frac{dx_i}{dt}Y^j(t)=0\ ,\ t\in J\ . \tag{4.3}$$

反之，给定一个向量 $V\in T_\gamma(\tau_1)(M)$. 不妨设 $\tau_1,\tau_2\in J$. 根据线性常微分方程的理论，方程 (4.3) 具有唯一解 $Y^i(t),t\in J$, 使得 $Y(\tau_1)=V$, 于是 $Y(t)=\sum_{i=1}^d Y^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$ 沿 $\gamma(t)$ 是平行的.

定义 4.4 我们将采用如下记号:

$$Y(\tau_2)=t_{\tau_2\leftarrow\tau_2}V\ .$$

这里 $Y(\tau_2)\in T_{\gamma(\tau_2)}M$ 是由 $Y(\tau_1)=V$ 沿 γ 平行移动得到的.

定理 4.5 设 $X,Y\in\mathcal{X}(M)$. 取 $x_0\in M$, 假定 $X(x_0)\neq 0$, 记 γ 为 X 的从 x_0 出发的积分曲线，则

$$(\nabla_X Y)_{x_0}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{t_{0\leftarrow\epsilon}^\gamma Y_{\gamma(\epsilon)}-Y_{x_0}}{\epsilon}\ .$$

证明 记 $z_\epsilon=t_{0\leftarrow\epsilon}^\gamma Y_{\gamma(\epsilon)}, Z(u)=t_{u\leftarrow 0}^\gamma z_\epsilon\ ,\ 0\le u\le\epsilon$. 我们有

$$\frac{dZ^k(u)}{du}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{d\gamma^i}{du}Z^j(u)=0\ ,\ 0\le u\le\epsilon\ ,$$
$$Z^k(\epsilon)=Y^k(\epsilon)\ .$$

由中值定理，存在 $0\le u^*\le\epsilon$, 使得 $Z^k(\epsilon)=Z_\epsilon^k(0)+\epsilon\frac{dZ^k}{du}(u*)$. 于是

$$\frac{(t_{0\leftarrow\epsilon}^\gamma Y_{\gamma(\epsilon)})^k-Y_{x_0}^k}{\epsilon}=\frac{Z^k(\epsilon)-\epsilon\frac{d}{du}Z^k(u^*)-Y^k(0)}{\epsilon}$$
$$=\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{d\gamma^i}{du}(u^*)Z^j(u^*)+\frac{Y^k(\epsilon)-Y^k(0)}{\epsilon}.$$

令 $\epsilon\to 0$, 则

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{(t_{0\leftarrow\epsilon}^\gamma Y_{\gamma(\epsilon)})^k-Y_{x_0}^k}{\epsilon}=\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{d\gamma^i}{du}(0)Y^j(0)+\frac{dY^k}{du}(0)$$
$$=(\nabla_X Y)^k(x_0)\ .$$

∎

定义 4.6 设 $\gamma: t \longmapsto \gamma(t)$ $(t \in I)$ 为 M 上一光滑曲线. γ 称为 测地线, 如果其切向量 $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ 沿 $\gamma(t)$ 平行.

假定 $\gamma(t)$ $(t \in J)$ 为一段测地线, 使得 $\gamma(t)$ 没有重点 $(t \in J)$, 且 $\gamma(J)$ 包含在一局部坐标邻域内, 则由 (4.3) 得出:

$$\frac{d^2\gamma^k(t)}{dt} + \sum_{k,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i(t)}{dt} \cdot \frac{d\gamma^j(t)}{dt} = 0. \tag{4.4}$$

于是, 对任意 $x \in M, X \in T_xM, X \neq 0$, 存在一条测地线 $\gamma(t), t \in I$, 使得

$$\gamma(0) = x \ , \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = X \ .$$

定义 4.7 给定仿射连络 ∇, 其挠率 T 和曲率 R 定义如下:

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \ , \quad X, Y \in \mathcal{X}(M) \ , \\ R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \ , \\ & \qquad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M) \ . \end{aligned}$$

容易验证:

$$\begin{aligned} T(fX, gY) &= fgT(X,Y) \ , \\ R(fX, gY)hZ &= fgh\, R(X,Y)Z \ , \end{aligned}$$

其中 $f, g, h \in C^\infty(M)$, $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

§ 5. Riemann 流形

定义 5.1 微分流形 M 称为 Riemann 流形, 如果 $\forall x \in M$, 切空间 T_xM 上都给定了一内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ 使得 $x \longmapsto \langle X, Y \rangle_x$ 是光滑函数, 其中 X, Y 为 M 上任意一对向量场.

定理 5.2(Riemann 流形的基本定理) 在 Riemann 流形上存在唯一的仿射连络 ∇ 使得

(i) 挠率 $T=0$,

(ii) $Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle$, $X,Y,Z\in\mathcal{X}(M)$.

条件 (ii) 表明 ∇ 诱导的平行移动关于 Riemann 度量是保距的. 连络 ∇ 称 Levi-Civita 连络.

证明 (i) 等价于 $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$. 由 (ii) 得

$$Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle+\langle[Z,X],Y\rangle\ . \tag{5.1}$$

在上式中变换 X,Y,Z 的位置, 我们有

$$X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_Y X,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\langle+\langle[X,Y],Z\rangle\ , \tag{5.2}$$

$$Y\langle Z,X\rangle=\langle\nabla_Z Y,X\rangle+\langle Z,\nabla_Y X\rangle+\langle[Y,Z],X\rangle\ . \tag{5.3}$$

(5.1) 加 (5.3) 减 (5.2) 得

$$\begin{aligned}2\langle X,\nabla_Z Y\rangle=&Z\langle X,Y\rangle+Y\langle Z,X\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle\\&-\langle[Z,X],Y\rangle-\langle[Y,Z]X\rangle-X\langle Y,Z\rangle\ .\end{aligned} \tag{5.4}$$

由 (5.4) 可以清楚地看出 $\nabla_Z Y$ 是唯一确定的. 反之, 由 (5.4) 式出发定义 $\nabla_Z Y$, 可以验证它满足连络的两个公理, 且满足定理中条件 (i) 和 (ii). ∎

在以后的讨论中, 我们固定 Levi-Civita 连络.

流形 M 上给定的 Riemann 结构将诱导 M 上的 Riemann 度量. 确切地说, 设 $t\longmapsto\gamma(t)(0\leq t\leq 1)$ 为 M 上的一光滑线段, γ 的弧长定义如下:

$$L(\gamma)=\int_0^1\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle_{\gamma(t)}^{1/2}dt\ , \tag{5.5}$$

其中 $\dot\gamma(t)=\frac{d\gamma(t)}{dt}$.

定义 5.3 假定 M 为连通的，设 $x, y \in M$，记

$$d(x,y) = \inf\{L(\gamma):\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y,\ \gamma\text{为光滑线段}\}. \tag{5.6}$$

容易验证，d 定义了 M 上的一距离.

流形 M 称为完备的，如果它是连通的且 (M,d) 为一完备度量空间.

定理 5.4 给定一连通的 Riemann 流形，下面三个条件是等价的：

(i) M 是完备的；

(ii) M 的有界闭集是紧的；

(iii) M 中的测地线 γ 可以无限延长，即 γ 的定义域为 $I = \mathbb{R}$.

证明 见 [He, p.56] 及 [KN 1, p.172]. ∎

下面我们讨论长度变分的思想. 固定两点 $x, y \in M$，记

$$\Gamma = \{\gamma:\ [0,1] \longrightarrow \text{逐段光滑曲线}:\gamma(0) = x, \gamma(1) = y\},$$

$$T_\gamma = \{\text{沿 } \gamma \text{ 逐段光滑的向量场} X(\tau):\ X(\tau) \in T_{\gamma(\tau)}M, X(0) = 0,\ X(1) = 0\}.$$

T_γ 具有线性结构，可当作 Γ 在点 γ 的切空间. 长度 L 是 Γ 上的泛函. 现在给定 $X \in T_\gamma$，考虑一组曲线 γ^s 满足如下性质：

(i) $\gamma^s \in \Gamma$，$-\epsilon < s < \epsilon$；

(ii) $\gamma^0 = \gamma$；

(iii) 存在 $[0,1]$ 的一个分划：$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$，使得 $(t,s) \longmapsto \gamma^s(t)$ 在每个矩形 $[t_i, t_{i+1}] \times (-\epsilon, \epsilon)$ 上是可微的.

(iv) 对每个固定的 $t \in [0,1]$, $\left\{\frac{d\gamma^s(t)}{ds}\right\}_{s=0} = X_{\gamma(t)}$. 定义:

$$dL(X) = \left\{\frac{d}{ds}L(\gamma^s)\right\}_{s=0}. \tag{5.7}$$

定理 5.5 $\gamma \in \Gamma$ 是测地线, 当且仅当 $dL(X) = 0, \forall X \in T_\gamma$.

证明 见 [KN 2, p.80] . ∎

注 随机变分计算便是上述思想在讨论连续轨道时的发展.

下面我们将引进 Laplace-Beltrami 算子. 给定 $f \in C^\infty(M)$, f 的梯度 $\nabla f \in \mathcal{X}(M)$ 由下式给出:

$$\langle \nabla f(x), X(x)\rangle = X(f)(x) \ , \forall X \in \mathcal{X}(M) \ .$$

在局部坐标系 $(U, x_1, \cdots, x_d)$ 下, 记

$$g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle_x \ , \ x \in U \ .$$

上式可理解如下: 取 $\varphi \in C^\infty(M)$, $\varphi(x) = 1, \varphi(y) = 0$, $\forall y \in U^c$. 将局部向量场 $\frac{\partial}{\partial x}$ 扩展成向量场 $A_i \in \mathcal{X}(M)$, 则

$$g_{ij}(x) = \langle A_i, A_j\rangle_x \ .$$

若记 (g^{ij}) 为 (g_{ij}) 的逆矩阵, 则 $(\nabla f(x))^i = \sum_{j=1}^d g^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

定义 5.6 记 $G = (g_{ij})$, 对任意支集包含在 U 内的连续泛函 f, 定义

$$\int_U f(x)dv(x) = \int_U f(x)\sqrt{det\, G(x)}dx_1 \cdots dx_d \ . \tag{5.8}$$

现在取 U 上的另一坐标系 $(y_1, \cdots, y_d)$, 令 $J = (\frac{\partial y_i}{\partial x_j})$ 为对应的 Jacobi 阵, 则在新坐标系下, $\tilde{G} = J^{*-1}GJ^{-1}$($J^*$ 为 J 的转置),

$$\begin{aligned}
\int_U f(y)dv(y) &= \int_U f(y)\sqrt{det\, \tilde{G}(y)}dy_1 \cdots dy_d \\
&= \int_U f(x)\sqrt{det\, J^{*-1}GJ^{-1}} \mid det\, J \mid \ dx_1 \cdots dx_d \\
&= \int_U f(x)\sqrt{det\, G(x)}\, dx_1 \cdots dx_d \ .
\end{aligned}$$

由此可知定义 5.6 不依赖于局部坐标系的选取.

令 $\{U_n, n \geq 1\}$ 是 M 的一列坐标邻域，它构成 M 的局部有限覆盖．设 $\{\theta_n, n \geq 1\}$ 为流形 M 上从属于 $(U_n, n \geq 1)$ 的单位分解, 即 $\theta_n \in C^\infty(M)$ 满足下列条件:

(i) $0 \leq \theta_n \leq 1$;

(ii) θ_n 的支集 $\mathrm{supp}\theta_n$ 是紧的，且 $\mathrm{supp}\theta_n \subset U_n$;

(iii) 对任意紧集 K, 至多只有有限个 n 使得 $\mathrm{supp}\theta_n \cap K \neq \emptyset$;

(iv) $\sum_{n\geq 1} \theta_n = 1$.

记 $C_c(M)$ 为 M 上紧支集的连续函数组成的空间．我们定义 $C_c(M)$ 上的泛函

$$T(f) = \sum_n \int_{U_n} \theta_n f \, d\nu \ , \ f \in C_c(M) \ ,$$

其中右边的积分如 (5.8) 定义．由 Riesz 表现定理知，存在 M 上一 Borel 测度 $d\nu$(我们仍采用同一记号 $d\nu$), 使得

$$T(f) = \int_M f \, d\nu,$$

$d\nu$ 称为 M 上的 Riemann 测度．记 $C_c^\infty(M) = C_c(M) \cap C^\infty(M)$, 任取 $f, g \in C_c^\infty(M)$, 则由定义 5.6 及分部积分公式知，存在 $\Delta_M f \in C_c^\infty(M)$, 使得

$$\int_M \Delta_M f \cdot g \, d\nu = \int_M \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle d\nu(x) \ . \tag{5.9}$$

定义 5.7 Δ_M 称为 M 上的 Laplace-Beltrami 算子.

注 在上面定义中，并没有出现连络的概念．实际上，对任意仿射连络 ∇, 我们也可定义相应的 Laplace 算子．取 $X \in \mathcal{X}(M)$,

固定 $x \in M$, 则 $Z \longmapsto \Lambda_X(Z) = (\nabla_Z X)_x$ 是 $T_x M$ 上的线性变换.
定义

$$(\text{div}X)_x = \Lambda_X \text{的迹} \ ,$$

则相应的 Laplace 算子为: $\Delta^{\nabla} f = -\text{div}(\nabla f)$. 当 ∇ 为 Levi-Civita 连络时, 以上两种定义吻合.

§ 6. 规范标架丛

给定一 Riemann 流形 M, 我们取 Levi-Civita 连络. 设 $x \in M$, x 上的 规范标架 r 是一等距映射:

$$r \ : \ \mathbb{R}^d \longrightarrow T_x M \ ,$$

其中 $\mathbb{R}^d$ 赋以欧氏距离. 记 $\mathcal{O}(M)$ 为 M 上规范坐标架的全体, 则 $\mathcal{O}(M)$ 具有一微分结构, 使得 $\mathcal{O}(M)$ 是微分流形, 并且

$$(r, g) \longmapsto r \cdot g^{-1}$$

是 $\mathcal{O}(M) \times \mathcal{O}(d)$ 到 $\mathcal{O}(M)$ 的光滑映射, 其中 $\mathcal{O}(d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上正交矩阵群. 记 so(d) 为 $\mathcal{O}(d)$ 的李代数, 它是 $\mathbb{R}^d$ 上反对称矩阵空间.

定义 6.1 给定 $q \in \text{so}(d)$, 记

$$q^*(r) = \left\{ \frac{d}{d\epsilon} r \cdot e^{-\epsilon q} \right\}_{\epsilon = 0} \ .$$

q^* 称为 $\mathcal{O}(M)$ 上的 基础向量场, 它不依赖于连络的选取.

令 π 为 $\mathcal{O}(M)$ 到 M 上的自然投影, 则

$$d\pi(r) \cdot q^* = 0 \ , \forall q \in \text{so}(d) \ .$$

事实上, 由于 $\pi(r \cdot e^{-\epsilon q}) = \pi(r) = x$, 两边对 ϵ 求导, 并令 $\epsilon = 0$, 则得到上式.

命题 6.2 记

$$V = \{A \in \mathcal{X}(\mathcal{O}(M)) : d\pi(r) \cdot A = 0, \forall r\} .$$

映射 $q \longmapsto q^*$ 为 $\mathrm{so}(d)$ 到 V 中的单射.

证明 $g \longmapsto R_r(g) = r \cdot g^{-1}$ 是 $\mathcal{O}(d)$ 到 $\mathcal{O}(M)$ 中的光滑映射,且 $q^*(r) = dR_r(e) \cdot q$. 于是 $\{q^* : q \in \mathrm{so}(d)\}$ 为 V 的线性子空间. 现在设:

$$q^*(r) = 0 \ , \ \forall r \in \mathcal{O}(M).$$

我们有 $q^*(re^{-tq}) = 0$, 即 $\frac{d}{dt} r \cdot e^{tq} = 0, \forall t \geq 0$. 于是 $e^{-tq} = Id$(恒等映射), $q = 0$. ∎

下面我们将定义 $\mathcal{O}(M)$ 上的水平向量场, 它依赖于流形上的连络. 记 $\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_d\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的典则基底. 设 $r \in \mathcal{O}(M)$, $x = \pi(r)$. 记 $z_i = r\epsilon_i \in T_x M$. 令 $\xi_i(\tau)$ 为 M 上的从 x 点出发、与 z_i 相切的测地线. 记 $r_i(\tau)$ 为 r 沿 $\xi_i(\tau)$ 平行移动生成的曲线.

定义 6.3 我们将采用如下记号:

$$A_i(r) = \left\{ \frac{d}{d\tau} r_i(\tau) \right\}_{\tau=0} \ , \ i = 1, \cdots, d \ . \tag{6.1}$$

命题 6.4 我们有

$$r^{-1} d\pi(r) A_i = \epsilon_i \ , \ i = 1, \cdots, d \ .$$

证明 由 $r_i(\tau)$ 的构造, $\pi(r_i(\tau)) = \xi_i(\tau)$, 于是

$$d\pi(r) A_i = \left\{ \frac{d}{d\tau} \pi(r_i(\tau)) \right\}_{\epsilon=0} = \left\{ \frac{d}{d\tau} \xi_i(\tau) \right\}_{\epsilon=0} = r\epsilon_i \ . \qquad \blacksquare$$

定义 6.5 (i) $\mathcal{O}(M)$ 上典则微分形式 θ 定义如下:

$$\theta(Z)_r = r^{-1} d\pi(r) Z_r \ , \ Z \in \mathcal{X}(\mathcal{O}(M)) \ .$$

(ii) $\mathcal{O}(M)$ 上 连络形式ω 定义如下:

$$\omega(z)_r \in \mathrm{so}(d)\,, \text{且}\, \omega(z)_r^* = z - \sum_{i=1}^{d} \theta^i(z) A_i\ .$$

由命题 6.2,6.4 和维数定理, $q \longmapsto q^*$ 实际上是 so(d) 到 V 上的线性同构. 由 θ 的定义容易验证: $z - \sum_{i=1}^d \theta^i(z) A_i \in V$. 于是定义 6.5(ii) 是有意义的.

我们有如下关系式:

$$\begin{aligned} \theta(A_i) &= \epsilon_i\ , \quad \theta(q^*) = 0, \\ \omega(A_i) &= 0\ , \quad \omega(q^*) = q. \end{aligned} \tag{6.2}$$

定理 6.6 $\{A_i, i = 1, \cdots, d, q_{ij}^*, 1 \le i < j \le d\}$ 在每个切空间 $T_r\mathcal{O}(M)$ 上构成一组基底, 其中 q_{ij} 是 so(d) 的典则基底:

$$q_{ij}\epsilon_j = -\epsilon_i\ , \quad q_{ij}\epsilon_i = \epsilon_j\ .$$

证明 由 (6.2) 容易证明: $A_i, i = 1, \cdots, d,\ q_{ij}^*, 1 \le i < j \le d$ 线性无关, 于是它们构成切空间的基底. ∎

现在我们讨论 θ, ω 在 $\mathcal{O}(d)$ 作用下的变化, 记 $R_g(r) = rg^{-1}$.

定理 6.7 我们有

(i) $R_g^*\theta = g\theta$;

(ii) $R_g^*\omega = Ad(g)\omega$.

证明 首先, 我们有

$$\begin{aligned} R_g^*\theta(Z) &= \theta_{rg^{-1}}(dR_g(r)Z) \\ &= g\,r^{-1} d\pi\big(R_g(r)\big) \cdot dR_g(r)Z \\ &= g^{-1}\, d\big(\pi \circ R_g\big)(r)Z \\ &= g^{-1}\, d\pi(r)Z = g\theta(Z). \end{aligned}$$

故 (i) 式得证. 由 (i), 当 Z 为水平向量场时, $dR_g(r)Z$ 仍为 $\mathcal{O}(M)$ 上的水平向量场. 于是只需对 $Z=q^*$ 的情形验证 (ii). 由于

$$R_g^*\omega(q^*)=\omega_{rg^{-1}}(dR_g^*\,q^*)=\omega_{rg^{-1}}\left\{\frac{d}{d\epsilon}R_g(r\,e^{-\epsilon q})\right\}_{\epsilon=0},$$

且

$$\begin{aligned}\left\{\frac{d}{d\epsilon}R_g(re^{-\epsilon q}\right\}_{\epsilon=0}&=\left\{\frac{d}{d\epsilon}rg^{-1}\cdot ge^{-\epsilon g}g^{-1}\right\}_{\epsilon=0}\\&=\left\{\frac{d}{d\epsilon}rg^{-1}\cdot e^{-\epsilon Ad(g)q}\right\}_{\epsilon=0}\\&=\big(Ad(g)q\big)^*(rg^{-1}),\end{aligned}$$

于是有

$$\big(R_g^*\omega\big)(q^*)=Ad(g)\omega(q^*).$$ ∎

最后我们给出 $\mathcal{O}(M)$ 上的结构方程.

定理 6.8 我们有

$$\begin{aligned}d\theta&=-\omega\wedge\theta,\\d\omega&=-\omega\wedge\omega+\Omega,\end{aligned}$$

其中 $\Omega_r(a,b)=r^{-1}\circ R(ra,rb)\circ r,\ \forall a,b\in\mathbb{R}^d$.

证明 见 [KN p.77,p.120, p.133].

注 Ω 为曲率张量 R 的数值化, 或称它为 R 在 $\mathcal{O}(M)$ 上的表示.

第二章 随机微分方程

本章讨论流形上的随机微分方程、随机流及 Riemann 流形上 Brown 运动的构造. 我们假定读者对 Itô 随机分析有一定了解.

§1. $\mathbb{R}^d$ 上的随机微分方程

给定 $\mathbb{R}^d$ 上 $m+1$ 个向量场 $A_0, A_1, \cdots, A_m$. 假定每个 A_i 满足 Lipschitz 条件:

$$| A_i(x) - A_i(y) | \le c|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

这一条件蕴含线性增长条件: $|A_i(x)| \le K(1+|x|)$. 令 $(w(t), 0 \le t < \infty)$ 为某概率空间上的 m- 维 Brown 运动. 令 $\mathcal{F}_t = \sigma(w(s), s \le t)$. 考虑 $\mathbb{R}^d$ 上如下 Itô 随机微分方程:

$$\begin{aligned} dX_n(t) &= \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(X_w(t))dw^\alpha(t) + A_0(X_w(t))dt, \\ X_w(0) &= x\ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

定义 1.1 $\mathbb{R}^d$ 上 $(\mathcal{F}_t)$ 适应随机过程 $X_w(t)$ 称为方程 (1.1) 的解, 如果

(i) 对几乎处处 $w, t \longmapsto X_w(t)$ 是连续的;

(ii) $X_w(t) = x + \sum_{\alpha=1}^m \int_0^t A_\alpha(X_w(s))dw^\alpha(s) + \int_0^t A_0(X_w(s))ds$.

定理 1.2 方程 (1.1) 存在唯一解.

证明 见 [H. 第四章].

注 上述意义下的解是通常所说的强解.

今后, 我们令 $W = C(\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m)$, 在 W 上赋于有界区间上一致收敛拓扑, 令 $\mathcal{F}$ 为 W 的 Borel σ- 代数, $\mathbb{P}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的标

准 Wiener 测度. 记

$$W_t(w) = w(t) \ , \ 0 \le t < \infty \ ,$$

则 $(W_t, t \ge 0)$ 为 $(W, \mathcal{F}, I\!P)$ 上的 m 维 Brown 运动. 为了记号上的方便, 我们直接用 $(w(t), t \ge 0)$ 表示 $(W_t(w), t \ge 0)$.

方程 (1.1) 的下述马氏性是对应的热半群理论的出发点.

定理 1.3 若记 $X_w(t,x)$ 为方程 (1.1) 的解, 给定 $\tau > 0$, 令

$$\big(\theta_\tau w\big)(t) = w(t+\tau) - w(\tau),$$

则

$$X_w(t+\tau, x) = X_{\theta_\tau w}\big(t, X_w(\tau, x)\big). \tag{1.2}$$

证明 记 $\mathcal{F}_t^\tau$ 为由 $\{w(s+\tau) - w(\tau);\ s \le t\}$ 生成的 σ- 代数, 则 $\theta_\tau w$ 为 $(\mathcal{F}_t^\tau)$-Brown 运动, 且与 $X(\tau, x)$ 独立. 我们有

$$\begin{aligned}
&X_w(t+\tau) - X_w(\tau) \\
&\quad = \sum_{\alpha=1}^m \int_\tau^{t+\tau} A_\alpha(X_w(s))dw^\alpha(s) + \int_\tau^{t+\tau} A_0(X_w(s))ds \\
&\quad = \sum_{\alpha=1}^m \int_0^t A_\alpha(X(s+\tau))d(\theta_\tau w)^\alpha(s) + \int_0^t A_0(X_w(s+\tau))ds \ .
\end{aligned}$$

于是 $X_w(t+\tau)$ 满足方程

$$\begin{aligned}
dY_w(t) &= \sum_\alpha^m (Y_w(t))d(\theta_\tau w)^\alpha(t) + A_0(Y_w(t))dt, \\
Y_w(0) &= X_w(\tau).
\end{aligned}$$

由解的唯一性知, $X_w(t+\tau) = X_{\theta_\tau w}(t, X_w(\tau))$. ∎

§2. 流形上的随机微分方程

为讨论简单起见，从现在开始我们总是假定微分流形 M 是紧致的．在这种情形下，我们所讨论的随机微分方程总是具有整体解.

给定 $A_0, A_1, \cdots, A_m \in \mathcal{X}(M)$(流形 M 的维数总是假定为 d)，类似地，我们考虑如下的随机微分方程：

$$\begin{aligned} dX_w(\tau) &= \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(X_w(\tau)) \circ dw^\alpha(\tau) + A_0(X_w(\tau))d\tau , \\ X_w(0) &= x_0 , \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\circ dw^\alpha$ 表示在 Stratonovich 意义下的随机微分．这样处理有两个本质性的原因．首先要考虑方程 (2.1) 在坐标变换下的不变性；另一方面，我们将在下节中看到，方程 (2.1) 实际上是常微分方程的极限情形．由于方程 (2.1) 实际上是积分方程，而在流性上直接求和是无意义的，那么，怎样看 (2.1) 式呢？当然，我们可以通过局部坐标来解释 (2.1)．我们将采用这种方法来构造方程 (2.1) 的解.

定义 2.1 M 上的一连续随机过程 $\{X_w(\tau),\ \tau \geq 0\}$ 称为方程 (2.1) 的解，如果

(i) $X_w(\tau)$ 关于 $\mathcal{F}_\tau$ 适应的；

(ii) 对任意的 $f \in C^\infty(M)$,

$$f(X_w(\tau))-f(x_0)=\sum_{\alpha=1}^{m}\int_0^\tau (A_\alpha f)(X_w(s))\circ dw^\alpha(s)+\int_0^\tau (A_0 f)(X_w(s))ds.$$

定理 2.2 方程 (2.1) 有唯一解.

证明 给定 $x_0 \in M$, 取 x_0 的一局部坐标 U. 假定 U 是相对紧的. 在 U 中,

$$A_\alpha = \sum_{i=1}^{d} \sigma_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

将 σ_α^i 扩展成在 $I\!R^d$ 上有紧支集的光滑函数, 考虑 $I\!R^d$ 上的随机微分方程

$$\begin{aligned} dX_t^i &= \sum_{\alpha=1}^{m} \sigma_\alpha^i(X_t) \circ dw^\alpha(t) + \sigma_0^i(X_t)dt, \\ X_0 &= x_0. \end{aligned}$$

此方程等价于

$$\begin{aligned} dX_t^i &= \sum_{\alpha=1}^{m} \sigma_\alpha^i(x_t)dw^\alpha(t) + \Big(\sigma_0^i + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,k} \frac{\partial}{\partial x_k}\sigma_\alpha^i \sigma_\alpha^k\Big)(X_t)dt, \\ X_0 &= x_0. \end{aligned}$$

由定理 1.2 知, 上述方程存在唯一解 $X_t(x_0,w)$. 令

$$\tau_U(w) = \inf\{t > 0,\ X_t(x_0,w) \notin U\}.$$

定义

$$X_U(t,x_0,w) = X_{t\wedge\tau_U(w)}(x_0,w)\ ,$$

其中 $\wedge$ 表示对两者取下端. 则 $X_U(t,x_0,w) \in \overline{U}$, $\forall t > 0$. 现在取 x_0 的另外一个相对紧局部坐标 $\widetilde{U}$, 则

$$X_U(t,x_0,w) = X_{\widetilde{U}}(t,x_0,w)\,,\ \forall t \le \tau_U(w) \wedge \tau_{\widetilde{U}}(w)\ .$$

事实上, 在坐标系 $\tilde{x} = (\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_d)$ 下, $A_\alpha = \sum_{i=1}^d \tilde{\sigma}_\alpha(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$. 由于

$$A_\alpha = \sum_k \sigma_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k,i} \sigma_\alpha^k \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i},$$

于是

$$\tilde{\sigma}^i_\alpha(\tilde{x}) = \sum_k \sigma^k_\alpha(x)\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_k} .$$

由 Itô 公式，令 $y_t = \tilde{x}(X_U(t,x,w))$, 则

$$\begin{aligned} dy^i_t &= \sum_k \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_k}(X_U(t)) \circ dX^k_U(t) \\ &= \sum_{k\alpha} \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_k}(X_U(t))\sigma^i_\alpha(X_U(t)) \circ dw^\alpha(t) \\ &\quad + \sum_k \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_k}(X_U(t)\sigma^k_0(X_U(t))dt \\ &= \sum_\alpha \tilde{\sigma}^i_\alpha(y_t) \circ dw^\alpha(t) + \tilde{\sigma}^i_0(y_t)dt . \end{aligned}$$

由解的唯一性知：

$$y_t = X_{\widetilde{U}}(t,x_0,w) \ , \ t \le \tau_{\widetilde{U}}(w) .$$

所以方程 (2.1) 不依赖于局部坐标的选取.

现在取一组相对紧的局部坐标 $\{U_\beta, \beta = 1,\cdots,N\}$, 使之构成 M 的覆盖： $M = \bigcup_{\beta=1}^N U_\beta$. 假定其中有 $U_1,\cdots,U_l$ 包含 x_0, 定义

$$\hat{x}(t,x_0,w) = X_{U_i}(t,x_0,w) \ , \ \forall t \in [0, \hat{\tau}_{x_0}(w)] \ ,$$

其中 $\hat{\tau}_{x_0}(w) = \sup_{1\le i\le l}\{\tau_{U_i}(w)\}$, 它是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时：

$$\{\hat{\tau}_{x_0} < t\} \in \mathcal{F}_t .$$

记 $\tau_1(w) = \hat{\tau}_{x_0}(w)$, $X_w(t) = \hat{X}(t,x_0,w)$, $t \in [0,\tau_1]$. 用归纳法，假定 $\tau_n(w)$ 已经构造，且 $X_w(t)$ 对 $t \in [0,\tau_n(w)]$ 均有定义. 记

$$x_n = X_w(\tau_n) , \quad b_n(t,w) = w(t+\tau_n) - w(\tau_n) .$$

若记 $\mathcal{F}^{\tau_n}_t = \sigma\{w(s+\tau_n) - w(\tau_n), s \le t\}$, 由 Brown 运动的强马氏性知， b_n 关于 σ- 代数流 $\mathcal{F}^{\tau_n}_t$ 是 Brown 运动. 我们定义：

$$\begin{aligned} &\tau_{n+1} = \tau_n + \hat{\tau}_{x_n}(b_n), \\ &X_w(t) = \hat{x}(t-\tau_n, x_n, b_n) \ , \ t \in [\tau_n, \tau_{n+1}] . \end{aligned}$$

我们有

$$\{\tau_{n+1}<t\}=\{\hat{\tau}_{x_n}(b_n)<t-\tau_n\}$$
$$=\bigcup_{r\in Q,r<t}\{\hat{\tau}_{x_n}(b_n)<r\}\cap\{\tau_n+r<t\}\ .$$

给定 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时 σ, 记 $\mathcal{F}_\sigma=\sigma\{A:\ A\cap\{\tau<t\}\in\mathcal{F}_t\}$. 易知

$$\mathcal{F}_t^{\tau_n}\subset\mathcal{F}_{t+\tau_n}\ .$$

而 $\hat{\tau}_{x_n}(b_n)$ 是 $(\mathcal{F}_t^{\tau_n})$ 的停时，于是 $\{\hat{\tau}_{x_n}(b_n)<r\}\in\mathcal{F}_r^{\tau_n}\subset\mathcal{F}_{r+\tau_n}$, 所以 $\{\hat{\tau}_{x_n}(b_n)<r\}\cap\{\tau_n+r<t\}\in\mathcal{F}_t$ ，从而 τ_{n+1} 仍是 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时. 记 $\tau_\infty=\sup_n\tau_n$, 则由 M 的紧性， $\tau_\infty=+\infty$.

任取 M 的开集 U, 我们有

$$\{w,X_w(t)\in U\}=\bigcup_{n\geq1}\{w:\ X_w(t)\in U\}\cap\{\tau_n\leq t\leq\tau_{n+1}\}$$
$$=\bigcup_{n\geq1}\left(\{w:\hat{x}(t-\tau_n,x_n,b_n)\in U\}\cap\{\tau_n\leq t\}\right)\cap\{\tau_{n+1}\geq t\}\in\mathcal{F}_t\ .$$

现在我们验证：上面构造的连续适应过程 $X_w(t)$ 是方程 (2.1) 的解. 任取 $f\in C^\infty(M)$, 则

$$\begin{aligned}&f(X_w(t\wedge\tau_1))-f(x_0)\\&=\sum_{\alpha,i}\int_0^{t\wedge\tau_1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_w(s))\sigma_\alpha^i(X_w(s))\circ dw^\alpha(s)\\&\quad+\sum_i\int_0^{t\wedge\tau_1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_w(s))\sigma_0^i(X_w(s))ds\\&=\sum_\alpha\int_0^{t\wedge\tau_1}(A_\alpha f)(X_w(s))\circ dw^\alpha(s)+\int_0^{t\wedge\tau_1}(A_0f)(Z_w(s))ds\ .\end{aligned}$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
& f(X_w(t\wedge\tau_{n+1}))-f(W_w(t\wedge\tau_n)) \\
&\quad =\sum_\alpha\int_0^{(t-t\wedge\tau_n)\wedge\hat\tau_{x_n}(b_n)} A_\alpha f\big(\hat x(s,x_n,b_n)\big)\circ db_n^\alpha(s) \\
&\qquad +\int_0^{(t-t\wedge\tau_n)\wedge\hat\tau_{x_n}(b_n)} A_0 f\big(\hat x(s,x_n,b_n)\big)ds \\
&\quad =\sum_\alpha\int_{t\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_{n+1}} A_\alpha f(X_w(s))\circ dw^\alpha(s)+\int_{t\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_{n+1}} A_0 f(X_w(s))ds\ .
\end{aligned}
$$

逐项相加, 则得

$$
\begin{aligned}
f(X_w(t\wedge\tau_n))-f(x_0)=\sum_\alpha\int_0^{t\wedge\tau_n} A_\alpha f(X_w(s))\circ dw^\alpha(s) \\
+\int_0^{t\wedge\tau_n} A_0 f(X_w(s))ds.
\end{aligned}
$$

令 $n\to+\infty$, 则得

$$
f(X_w(t))-f(x_0)=\sum_\alpha\int_0^t A_\alpha f(X_w(s))\circ dw^\alpha(s)+\int_0^t A_0 f(X_w(s))ds.
$$

解的唯一性由其构造方法是显而易见的. ∎

注 上述构造方法显然适合于非紧情形, 此时 τ_∞ 为随机过程 X_w 的爆炸时.

类似于定理 1.3, 我们有

定理 2.3 方程 (2.1) 的解具有如下马氏性:

$$
X_w(t+\tau,x_0)=X_{\theta_\tau w}(t,X_w(\tau))\ ,\quad t,\tau>0\ .
$$

证明 令 $Y_w(t)=X_w(t+\tau,x_0)$, 任取 $f\in C^\infty(M)$, 则

$$
\begin{aligned}
& f(Y_w(t))-f(X_w(\tau)) \\
&\quad =\sum_\alpha\int_\tau^{\tau+t}(A_\alpha f)(X_w(s))\circ dw^\alpha(s)+\int_\tau^{\tau+t}A_0 f(X_w(s))ds \\
&\quad =\sum_\alpha\int_0^t(A_\alpha f)(Y_w(s))\circ d(\theta_\tau w)^\alpha(s)+\int_0^t A_0 f(Y_w(s))ds\ .
\end{aligned}
$$

于是定理 2.3 由解的唯一性推出. ∎

定理 2.4 令 $L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}A_\alpha^2+A_0$, 则对任意的 $f\in C^\infty(M)$,

$$
\begin{aligned}
& f(X_w(t))-f(x_0) \\
&=\sum_{\alpha=1}^{m}\int_0^t A_\alpha f(X_w(s))dw^\alpha(s)+\int_0^t (Lf)(X_w(s))ds\ .
\end{aligned}
$$

证明 根据 Itô 随机积分和 Stratonovich 随机积分间的关系:

$$
A_\alpha f(W_w(t))\circ dw^\alpha(t)=A_\alpha f(X_w(t))dw^\alpha(t)+\frac{1}{2}d\big(A_\alpha f(X_w(t))\big)dw^\alpha(t),
$$

上式最后一项为随机压缩项, 将 $A_\alpha f$ 替代 f, 则得

$$
d\,A_\alpha f(X_w(t))=\sum_\beta (A_\beta A_\alpha f)(X_w(t))\circ dw^\beta(t)+(A_0A_\alpha f)(X_w(t))dt.
$$

于是

$$
\sum_\alpha d\,A_\alpha f(X_w(t))dw^\alpha(t)=\sum_\alpha A_\alpha^2 f(X_w(t))dt\ .
$$

由定义 2.1(ii), 则得到欲证结果. ∎

注 上述结果将扩散过程与微分算子 L 的关系明显地表达出来了. 在实际应用中, 有时仅仅只用到 Stroock-Varadhan 意义下的 鞅问题 的解. 给定 M 上一微分算子 L, 定义在某个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},I\!P,\mathcal{F}_t)$(其中 $(\mathcal{F}_t)$ 为 Ω 上的 σ- 代数流) 上取 M 值的连续适应过程 (X_t) 称为 L 的鞅问题的解, 如果对任意的 $f\in C^\infty(M)$, $f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t(Lf)(X_s)ds$ 是一个鞅.

§3. 极限定理

为简单起见, 我们只介绍 Brown 运动轨道的逐段线性化的处理方法. 较详细的讨论请参看 [IW],[R].

给定自然数 $n \geq 1, T > 0$, 我们定义 $w_n(t)$ 是逐段线性的, 它由下面式子给出:

$$\dot{w}_n(t) = 2^n\big(w((k+1)2^{-n}) - w(k2^{-n})\big) \ , \ t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \ ,$$

$$k = 0, 1, \cdots, T2^n - 1.$$

即对 $t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$,

$$w_n(t) = w_n(k2^{-n}) + 2^n\big(w((k+1)w^{-n}) - w(k2^{-n})\big)(t - k2^{-n}) \ .$$

现考虑方程 (2.1) 对应的常微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(y(t))\dot{w}_n^\alpha(t) + A_0(y(t)), \\ y(0) &= x_0 \ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

它有唯一解 $X_n(t, x_0, w)$, $t > 0$. 并且由常微分方程理论可知,

$$x_0 \longmapsto X_n(t, x_0, w)$$

是一光滑映射 (对 t, w 固定). 记 $\partial_{x_0} X_n(t, x_0, w)$ 为 $X_n(t; x_0, w)$ 关于初值 $x_0 \in M$ 的微分, 则

$$\partial_{x_0} X_n(t, x_0, w) \ : \quad T_{x_0}M \longrightarrow T_{X_n(t,x_0,w)}M \ .$$

当参数 t, n 发生变化时, 切空间 $T_{X_n(t,x_0,w)}M$ 也随之变化. 为克服这个困难, 我们将流形 M 嵌到某个欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 中去. 存在 $\mathbb{R}^N$ 上具有紧支集的向量场 $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_m$, 使得

$$\tilde{A}_i(x) = A_i(x) \ , \ \forall x \in M \ .$$

(参阅 [CC,p.28].) 现考虑 $\mathbb{R}^N$ 上的方程

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t &= \sum_{\alpha=1}^{m} \tilde{A}_\alpha(\tilde{X}_t) \circ dw^\alpha(t) + \tilde{A}_0(\tilde{X}_t)dt \ , \\ \tilde{X}_0 &= x_0 \ , \end{aligned} \tag{3.2}$$

及

$$d\tilde{X}_t^n = \Big(\sum_{\alpha=1}^m \tilde{A}_\alpha(\tilde{X}_t^n)\dot{w}^\alpha(t)_n(t) + \tilde{A}_0(\tilde{X}_t^n)\Big)dt\ ,\qquad (3.3)$$
$$\tilde{X}_0^n = x_0\ .$$

于是当 $x_0 \in M$ 时，由解的唯一性，

$$\tilde{X}_t(w) = X_t(w),\ \forall t>0\ ,\ a.s.,$$
$$\tilde{X}_t^n(w) = X_n(t,x_0,w)\ ,\ \forall 0\le t\le T\ .\qquad (3.4)$$

定理 3.1 记 $\tilde{X}_t(x_0,w)$ 及 $\tilde{X}_t^n(x_0,w)$ 分别为方程 (3.2) 和 (3.2) 的解，则对几乎处处的 w, 一致地关于 $(t,x_0)\in[0,T]\times K$, 有

$$\tilde{X}_t(x_0,w) = \lim_{t\to+\infty}\tilde{X}_t^n(x_0,w)\ ,\qquad (3.5)$$

$$\partial_{x_0}\tilde{X}_t(x_0,w) = \lim_{n\to+\infty}\partial_{x_0}\tilde{X}_t^n(x_0,w)\ ,\qquad (3.6)$$

其中 K 为 $\mathbb{R}^N$ 中的紧集.

证明 见 [Mo] 及 [R]. ∎

推论 3.2 对几乎处处的 w, 关于 $(t,x_0)\in[t,T]\times M$ 一致地,

$$X_w(t) = \lim_{n\to+\infty}X_n(t,x_0,w)\ .$$

推论 3.3 记 $U_{t,w}(x_0)$ 为方程 (2.1) 解的上述修正，则对几乎处处的 w, 对任意的 $t\ge 0$, $x_0\longmapsto U_{t,w}(x_0)$ 是 M 到 M 的连续可微映射.

注 随机微分方程 (2.1) 的解可以通过极限定理 (推论 3.2) 来构造.

§ 4. 随机微分同胚流

设 $(X_w(t))$ 为方程 (2.1) 的解. 给定 $T>0$, 考虑反向 Brown 运动

$$\hat{w}(t) = w(T-t) - w(T)\ ,$$

则 $\hat{w}(t)$ 与 $X_w(T)$ 独立.

令 $\widehat{U}_{t,w}(x_0)$ 为下面随机微分方程的解:

$$
\begin{aligned}
d\hat{X}_w(t) &= \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(\hat{X}_w(t)) \circ dw^\alpha(t) - A_0(\hat{X}_w(t))dt, \\
\hat{X}_0 &= x_0.
\end{aligned}
$$

命题 4.1 下列关系成立:

$$
U_{T-t,w} = \widehat{U}_{t,\hat{w}} \circ U_{T,w}, \quad \widehat{U}_{T-t,\hat{w}} = U_{t,w} \circ \widehat{U}_{T,\hat{w}} \ , \tag{4.1}
$$

$$
U_{t+s,w} = U_{t,\theta_t w} \circ U_{s,w} \ , \quad t, s > 0. \tag{4.2}
$$

证明 我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} X_n(T-t, x_0, w) = &- \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha(X_n(T-t, x_0, w))\dot{w}_n^\alpha(t) \\
&- A_0(X_n(T-t, x_0, w)) \ .
\end{aligned}
$$

令 $\widehat{U}^n_{t,\hat{w}}(x_0)$ 为如下方程的解:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{X}^n_w(t)}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(\hat{X}^n_w(t))\dot{\hat{w}}_n - A_0(\hat{X}^n_w(t))dt \, , \\
\hat{X}^n_w(0) &= x_0 \ ,
\end{aligned}
$$

则

$$
X_n(T-t, x_0, w) = \widehat{U}^n_{t,\hat{w}}(X_n(T)) \ .
$$

对上式两边应用推论 3.2, 令 $n \to +\infty$, 则对几乎处处的 w,

$$
U_{T-t,w} = \widehat{U}_{t,\hat{w}} \circ U_{T,w}.
$$

用同样方法可证明其他两个等式. ∎

定理 4.2 对几乎处处 w, 对任意的 $t > 0$, $U_{t,w}$ 是 M 上的微分同胚.

证明 在 (4.1) 中，令 $T=t$, 则

$$\widehat{U}_{t,\hat{w}}\circ U_{t,w}=U_{t,w}\circ\widehat{U}_{t,\hat{w}}=\text{恒等映射}\ .$$

再将推论 3.3 分别应用到 $U_{t,w}$ 和 $\widehat{U}_{t,\hat{w}}$ 上，则证得 $U_{t,w}$ 是 M 上的微分同胚. ∎

§ 5. M 上 Brown 运动的构造

由于在一般的 Riemann 流形上， Laplace-Beltrami 算子 不能写成如下形式：

$$\Delta_M=-\sum_{\alpha=1}^{d}X_\alpha^2\ ,\ X_\alpha\in\mathcal{X}(M)\ ,$$

于是 §2 的理论不能直接应用. 按照第一章 §6 的记号，我们将记 $A_1,\cdots,A_d$ 为规范标架丛 $\mathcal{O}(M)$ 上的典则水平向量场. 定义 $\mathcal{O}(M)$ 上的水平 Laplace 算子：

$$\Delta_{\mathcal{O}(M)}=\sum_{i=1}^{d}A_i^2\ .$$

命题 5.1 对任意的 $f\in C^\infty(M)$, 有

$$\Delta_{\mathcal{O}(M)}(f\circ\pi)=-(\Delta_M f)\circ\pi\ ,\tag{5.1}$$

其中 π 为 $\mathcal{O}(M)$ 到 M 上的自然投影.

证明 在局部坐标 $(U,x_1,\cdots,x_d)$ 下， Δ_M 可表示成：

$$(\Delta_M f)(x)=\sum_{i,j}g^{ij}\Big(\sum_k\Gamma_{ij}^k\frac{\partial f}{\partial x_k}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\Big)\ .\tag{5.2}$$

由测地线方程 (见第一章 (4.4)) 可定义在 x_0 点附近的 法坐标V(参阅 [CC,p.145]). 在此法坐标 $(V,\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$ 下，

$$g_{ij}(x_0)=\delta_{ij}\ ,\qquad\Gamma_{ij}^k(x_0)=0\ ,\ \forall i,j,k\ .$$

于是由 (5.2) 式,

$$(\Delta_M f)(x_0) = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) . \tag{5.3}$$

记 $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的典则坐标, 对任意使 $\pi(r) = x_0$ 的 $r \in \mathcal{O}(M)$, $r\epsilon_i$ 可表示为 $(\alpha_1^i, \cdots, \alpha_d^i)$, 满足 $\sum_{k=1}^d \alpha_k^i \alpha_k^j = \delta_{ij}$. 另一方面, 在法坐标 $(V, \alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ 下, 从 x_0 点出发的与 $(\alpha_1^i, \cdots, \alpha_d^i)$ 相切的测地线方程为

$$\xi^i(t) = \alpha^i t .$$

于是有

$$\begin{aligned} A_i(f \circ \pi) &= \{\frac{d}{dt} f \circ \pi(\xi(t)\}_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}(x_0)\alpha_k^i , \end{aligned}$$

及

$$A_i^2(f \circ \pi) = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l}(x_0)\alpha_k^i \alpha_l^i .$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{O}(M)}(f \circ \pi)(r) &= -\sum_{i=1}^{d} A_i^2 (f \circ \pi)(r) \\ &= -\sum_{k,l}\sum_{k} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l}(x_0)\alpha_k^i \alpha_l^i \\ &= -\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_k^2}(x_0) \\ &= (\Delta_M f) \circ \pi(r) . \end{aligned}$$

∎

注 (5.1) 也可通过第一章定义 5.7 及 $\mathcal{O}(M)$ 上的 Riemann 测度在 $\mathcal{O}(d)$ 作用下的不变性证得.

现考虑 $\mathcal{O}(M)$ 上的随机微分方程:

$$
\begin{aligned}
&dr_w(t)=\sum_{i=1}^{d}A_i\big(r_w(t)\big)\circ dw^i(t)\\
&r_w(0)=r_0\ .
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

命题 5.2 记 R_g 为 $\mathcal{O}(d)$ 在 $\mathcal{O}(M)$ 上的右作用. $R_g(r)=rg^{-1}$, 则

$$
\tilde r_w(t)=R_g\big(r_w(t)\big)=r_{gw}(t)\ ,\ \forall t\geq 0\ . \tag{5.5}
$$

证明 我们将应用极限定理 (推论 3.2). 记 w_n 为 w 的片段线性光滑化, 记 $r_n(t,w)$ 为 (5.4) 光滑化后的常微分方程的解:

$$
\begin{aligned}
&\dot r_n(t,w)=\sum_{i=1}^{d}A_i\big(r_n(t,w)\big)\dot w_n^i(t)\ ,\\
&r_n(0,w)=r_0\ .
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

由第一章定理 6.7,

$$
\begin{aligned}
&(R_g)^*\theta\big(\dot r_n(t,w)\big)=g\theta\big(\dot r_n(t,w)\big)=gw_n(t)\ ,\\
&(R_g)^*w\big(\dot r_n(t,w)\big)=0\ .
\end{aligned}
$$

于是 $\dot{\tilde r}_n(t,w)=dR_g(r_n(t,w))\ \dot r_n(t,w)$ 满足如下方程:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\tilde r}_n(t,w)=\sum_{i=1}^{d}A_i\big(\tilde r_n(t,w)\big)\dot{\tilde w}_n^i(t)\ ,\ \tilde w=gw\ ,\\
&\tilde r_n(0,w)=r_0g^{-1}\ .
\end{aligned}
$$

由极限定理, 当 $n\to+\infty$ 时,

$$
\begin{aligned}
&d\tilde r_w(t)=\sum_{i=1}^{d}A_i\big(\tilde r_w(t)\big)\circ d\tilde w^i(t)\ ,\\
&\tilde r_w(0)=r_0g^{-1}\ .
\end{aligned}
$$

另一方面,

$$\tilde{r}_w(t) = \lim_{n\to+\infty} R_g\big(r_n(t,w)\big) .$$

于是 (5.5) 得证. ∎

定义 5.3 固定 $r_0 \in \mathcal{O}(M)$, 记

$$\gamma_w(t) = \pi\big(r_w(t)\big) , \quad \gamma_w(0) = x_0 = \pi(r_0) , \tag{5.7}$$

$\gamma_w(t)$ 称为 M 上的 Brown 运动. 令

$$\mathbb{P}(M) = \{M\text{上连续轨道}\gamma : [0,+\infty) \longrightarrow M\} . \tag{5.8}$$

记 P_x 为 γ_w 在 $\mathbb{P}(M)$ 上生成的分布, 则由命题 5.2, P_x 不依赖于 r_0 的选取.

定理 5.4 $\gamma_w(t)$ 为 M 上对应于算子 $-\frac{1}{2}\Delta_M$ 的扩散过程.

证明 只需证明

(i) $\{P_x, x\in M\}$ 满足强马氏性 ;

(ii) $P_x\{\gamma(0)=x\}=1$, 且

$$f\big(\gamma(t)\big) - f\big(\gamma(0)\big) + \frac{1}{2}\int_0^t (\Delta_M f)\big(\gamma(s)\big)ds$$

为一 P_x 鞅. (i) 直接由方程 (5.4) 的强马氏性推出. 而方程 (5.4) 的强马氏性由定理 2.4 (马氏性) 和推论 3.2(Feller 性) 推出. 往证 (ii). 记 $\tilde{f} = f\circ\pi$, 由于

$$\begin{aligned}\tilde{f}\big(r_w(t)\big) - &\tilde{f}\big(r_w(0)\big)\\ &= \sum_{i=1}^d \int_0^t A_i\tilde{f}(r_w(s))dw^i(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_{\mathcal{O}(M)}\tilde{f}(r_w(s))ds ,\end{aligned}$$

故由命题 5.1 推得 (ii). 定理证毕. ∎

定义 5.5 令

$$t^{\gamma_w}_{\tau_1\leftarrow\tau_2} = r_w(\tau_1)\circ r_w^{-1}(\tau_2) ,$$

则 $t^{\gamma_w}_{\tau_1\leftarrow\tau_2}$ 是 $T_{\gamma_w(\tau_2)}M \longrightarrow T_{\gamma_w(\tau_1)}M$ 的线性等距映射，我们称它为沿 Brown 运动轨道 $\gamma_w(\tau)$ 的 Itô 平行移动. 由命题 5.2 知，$t^{\gamma_w}_{\tau_1\leftarrow\tau_2}$ 的定义与 r_0 的选取无关.

§6. 随机 Jacobi 矩阵

记 $U_{t,w}(r_0)$ 为 $\mathcal{O}(M)$ 上的水平随机流：

$$U_{t,m}(r_0) = r_w(t)\ , \qquad r_w(0) = r_0\ .$$

在本节我们将给出 $U_{t,w}$ 关于 r_0 的微分 $U'_{t,w}$ 的表达式. 令 $\Theta = (\theta,\omega)$ 为 $\mathcal{O}(M)$ 上的典则一次微分形式，记

$$J(w,t,r_0) = \Theta_{r_w(t)} \circ U'_{w,t} \circ \Theta^{-1}_{r_0}\ . \tag{6.1}$$

则 $J(w,t,r_0)$ 为 $\mathcal{D}(d) = I\!R^d \times \mathrm{so}(d)$ 上的矩阵.

定理 6.1 定义 $u_k \in \mathrm{End}(\mathcal{D}(d))$, $k=1,\cdots,d$:

$$u_k(z)^i = z^i_k\ , \quad \big(u_k(z)\big)^i_j = \sum_l \Omega^i_{jkl} z^l\ , \tag{6.2}$$

其中 $\Omega^i_{jkl} = \langle \Omega(\epsilon_k,\epsilon_l)\epsilon_j, \epsilon_i\rangle$. 则 $J(w,t,r_0)$ 满足如下线性随机微分方程：

$$\begin{aligned} dJ(w,t,r_0) &= \sum_{k=1}^d u_k\big(J(w,t,r_0)\big) \circ dw^k(t), \\ J(w,0,r_0) &= \text{恒等映射}\ . \end{aligned} \tag{6.3}$$

证明 给定 $z \in \mathcal{D}(d)$, $z = (z^i, z^i_j)$, 记 Z 为 $\mathcal{O}(M)$ 上的向量场，使得

$$\Theta_{r_0}(Z) = z\ ,$$

即在 r_0 处有 $\theta^i(Z) = z^i$, $w^i_j(Z) = z^i_j$. 令 φ_ϵ 为 $\mathcal{O}(M)$ 上 Z 的积分曲线，则

$$U'_{t,w}(r_0)Z_{r_0} = \left\{\frac{d}{d\epsilon} U_{t,w}\big(\varphi_\epsilon(x)\big)\right\}_{\epsilon=0}\ . \tag{6.4}$$

考虑 $r_w(t)$ 的轨道的光滑化 $r_w^n(t)$, 并令 $U_{t,w}^n(r_0) = r_n(t,w)$, 使得 $r_n(0,w) = r_0$. 令

$$\beta_n(t,\epsilon) = \left\langle \theta, \frac{d}{d\epsilon} U_{t,w}^n(\varphi_\epsilon) \right\rangle ,$$
$$\rho_n(t,\epsilon) = \left\langle \omega, \frac{d}{d\epsilon} U_{t,w}^n(\varphi_\epsilon) \right\rangle .$$

我们有

$$\frac{dU_{t,w}^n(\varphi_t)}{dt} = \sum_{i=1}^{d} A_i\big(U_{t,w}^n(\varphi_\epsilon)\big)\dot{w}_n^i(t) , \tag{6.5}$$
$$U_{0,w}^n(\varphi_\epsilon) = \varphi_\epsilon .$$

考虑从 $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ 到 $\mathcal{O}(M)$ 中的映射 ψ_n:

$$(t,\epsilon) \longmapsto \psi_n(t,\epsilon) = U_{t,w}^n(\varphi_\epsilon)$$

及反推微分形式 $(\psi_n^*\theta, \psi_n^*\omega)$, 则有

$$\psi_n^*\theta = \alpha_n(t,\epsilon)dt + \beta_n(t,\epsilon)d\epsilon ,$$
$$\psi_n^*\omega = \sigma_n(t,\epsilon)dt + \rho_n(t,\epsilon)d\epsilon ,$$

其中 (由 (6.5) 式)

$$\alpha_n(t,\epsilon) = \langle \theta, \frac{d\psi_n}{dt} \rangle = \dot{w}_n(t) ,$$
$$\sigma_n(t,\epsilon) = \langle \omega, \frac{d\psi_n}{d\epsilon} \rangle = 0 .$$

于是

$$d\psi_n^*\theta = \frac{\partial \beta_n(t,s)}{\partial t} dt \wedge d\epsilon ,$$
$$d\psi_n^*\omega = \frac{\partial \rho_n(t,s)}{\partial t} dt \wedge d\epsilon .$$

另一方面, 由结构方程 (见第一章定理 6.8)

$$\psi_n^*(d\theta) = -\psi_n^*(\omega \wedge \theta) = -\psi_n^*\omega \wedge \psi_n^*\theta = \rho_n(t,\epsilon)\dot{w}_n(t)dt \wedge d\epsilon ,$$
$$\psi_n^* = -\psi_n^*(\omega \wedge \omega + \Omega) = \Omega(\dot{w}_n(t), \beta_n(t,\epsilon)) ,$$

由于 $d\psi_n^*\theta = \psi_n^*(d\theta)$, $d\psi_n^*\omega = \psi_n^*(d\omega)$, 故得

$$\frac{\partial \beta_n(t,\epsilon)}{\partial t} = \rho_n(t\epsilon)\dot{w}_n(t) ,$$
$$\frac{\partial \rho_n(t,\epsilon)}{\partial t} = \Omega(\dot{w}_n(t), \beta_n(t,\epsilon)) .$$

在上两式中令 $\epsilon = 0$, 并令 $n \to +\infty$, 由极限定理得:

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= \rho(t) \circ dw(t) , \\ d\rho(t) &= \Omega(\circ dw(t), \beta(t)) , \\ \beta^i(0) &= z^i , \quad \rho^i_j(0) = z^i_j . \end{aligned} \tag{6.6}$$

将 (6.6) 式用分量写出，我们有

$$d\beta^i(t) = \sum_k \rho^i_k(t) \circ dw^k(t) ,$$
$$d\rho^i_j(t) = \sum_{k,l} \Omega^i_{jkl} \circ dw^k(t)\beta^l(t) .$$

令 $J(w,t,r_0)$ 为方程 (6.3) 的解， $\tilde{Z} = J(w,t,r_0)z$, 则

$$d\tilde{z}^i(t) = \sum_{k=1}^d \tilde{z}^i_k \circ dw^k(t) ,$$
$$d\tilde{z}^i_j(t) = \sum_{k=1}^d \sum_l \Omega^i_{jkl}\tilde{z}^l \circ dw^k .$$

由解的唯一性推出

$$\tilde{z}^i = \beta^i , \qquad \tilde{z}^i_j = \rho^i_j ,$$

于是定理得证. ∎

第三章 热半群

本章将通过扩散过程来研究热半群的一些分析性质. 热方程解的概率表示是一个经典的结果.

§1. 热方程

给定紧 Riemann 流形 M 上一组向量场 $A_0, A_1, \cdots, A_m$, 考虑二次微分算子:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha^2 + A_0 \ .$$

设 $X_w(t,x)$ 为对应于 L 的扩散过程:

$$dX_w(t,x) = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha\big(X_w(t,x)\big) \circ dw^\alpha(t) + A_0\big(X_w(t,x)\big)dt \ ,$$
$$X_w(0,x) = x.$$

定义

$$H_t f(x) = \mathbb{E}\big[f\big(X_w(t,x)\big)\big] \ , \ \forall f \in C^\infty(M) \ . \tag{1.1}$$

命题 1.1 记 $u(t,x) = H_t f(x)$, 则 $u \in C^\infty([0,+\infty) \times M)$.

证明 首先, 由第二章 §4 讨论的随机流可证, 存在 $X_w(t,x)$ 的一个修正, 使得对几乎处处的 w, 对任意 $t > 0$ $x \longmapsto X_w(t,x)$ 是光滑映射. 于是对任意 $f \in C^\infty(M)$, $x \longmapsto H_t f(x)$ 是光滑函数.

其次, 由于

$$f\big(X_w(t,x)\big) - f(x) = 鞅 + \int_0^t (Lf)\big(X_w(s,x)\big)ds \ .$$

在上式两边取数学期望得

$$H_t f(x) = f(x) + \int_0^t \mathbb{E}(Lf)\big(X_w(s,x)\big)ds ,$$

即

$$H_t f(x) = f(x) + \int_0^t H_s L f(x) ds . \tag{1.2}$$

由归纳法易证

$$H_t f(x) = f(x) + t(Lf)(x) + \cdots + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} H_{t_n} L^n f(x) dt_n ,$$

由此立得命题结论. ∎

定理 1.2 (i) 在 $C^\infty(M)$ 上有 $LH_t = H_t L$;

(ii) $H_t f$ 满足如下热方程:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = (Lu)(t,x) ,$$
$$u(0,x) = f(x) .$$

证明 由 (1.2) 式知

$$H_{t+s} f(x) = H_t f(x) + \int_t^{t+s} H_u L f(x) du ,$$

于是

$$\lim_{s\to 0} \frac{H_{t+s} f(x) - H_t f(x)}{s} = \big(H_t L f\big)(x) . \tag{1.3}$$

另一方面, 由马氏性知 $H_t f$ 满足半群性质:

$$H_{t+s} f = H_s H_t f ;$$

从而有

$$\lim_{s\to 0} \frac{\big(H_{t+s} f\big)(x) - \big(H_t f\big)(x)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\big(H_s H_t f\big)(x) - \big(H_t f\big)(x)}{s}$$
$$= \big(L H_t f\big)(x) . \tag{1.4}$$

由 (1.3) 和 (1.4) 推得 (i), (1.4) 直接给出 (ii). ∎

定理 1.3 (Feynman-Kac 公式)　给定 $V\in C^\infty(M)$, 令

$$v(t,x)=\mathbb{E}\left[e^{\int_0^t V(X_w(s,x))ds}f\big(X_w(t,x)\big)\right],$$

则

(i) $v\in C^\infty([0,+\infty)\times M)$;

(ii) $\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)=\big(Lv\big)(t,x)+V(x)v(t,x)$, $\lim_{t\downarrow 0,y\to x}v(t,y)=f(x)$.

证明　由 Itô 公式,

$$\begin{aligned}
&de^{\int_0^t V(X_w(s,x))ds}f\big(X_w(t,x)\big)\\
&=\sum_{\alpha=1}^m e^{\int_0^t V(X_w(s,x))ds}\big(A_\alpha f\big)\big(X_w(t,x)\big)dw^\alpha(t)\\
&\quad+e^{\int_0^t V(X_w(s,x))ds}\Big[V\big(X_w(t,x)\big)f\big(X_w(t,x)\big)+\big(Lf\big)\big(X_w(t,x)\big)\Big]dt.
\end{aligned}$$

令 $Q_tf(x)=\mathbb{E}\left[e^{\int_0^t V(X_w(s,x))ds}f\big(X_w(t,x)\big)\right]$, 则由上式得

$$\big(Q_tf\big)(x)=f(x)+\int_0^t Q_s\big(Vf+Lf\big)(x)ds\ . \tag{1.5}$$

另一方面, 由于 $X_w(t+u,x)=X_{\theta_t w}\big(u,X_w(t)\big)$, 我们有

$$\begin{aligned}
\big(Q_{t+u}f\big)(x)&=\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big(e^{\int_0^{t+u} V(X_w(s,x))ds}\ f\big(X_w(t+u,x)\big)\Big|\mathcal{F}_t\Big)\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[e^{\int_0^t V(X_w(s,x))ds}\\
&\qquad\cdot\mathbb{E}\big[e^{\int_0^u V(X_{\theta_t w}(s,x_w(t)))ds}\ f\big(X_{\theta_t w}(u,X_w(t))\big)\big|\mathcal{F}_t\big]\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[e^{\int_0^t V(X_w(s,x))ds}\big(Q_uf\big)\big(X_w(t,x)\big)\Big]\\
&=\big(Q_tQ_uf\big)(x)\ .
\end{aligned}$$

于是 Q_t 满足半群性质 $Q_{t+u}=Q_t\cdot Q_u$. 由 (1.5) 式得

$$\lim_{t\to 0}\frac{Q_tf(x)-f(x)}{t}=Vf(x)+Lf(x)\ .$$

由半群性质，将 $Q_u f$ 在上式中替代 f，则有

$$\frac{dQ_t f(x)}{dt} = (V + L)Q_t f \ . \qquad \blacksquare$$

§ 2. Brown 运动的热半群

现在考虑 $\mathcal{O}(M)$ 上的水平 Laplace 算子

$$\Delta_{\mathcal{O}(M)} = \sum_{i=1}^{d} A_i^2 \ .$$

令 H_t 为对应于 $\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{O}(M)}$ 的半群. 给定 $f \in C^\infty(M)$，记 $\tilde{f} = f \circ \pi$，则由第二章命题 5.2 得

$$\big(H_t \tilde{f}\big)(r_0 g^{-1}) = \mathbb{E}\big(f\big(\gamma_{gw}(t, x_0)\big)\big) = \mathbb{E}\big(f\big(\gamma_w(t, x_0)\big)\big) = H_t \tilde{f}(r_0) \ .$$

定义 2.1 令

$$P_t f(x_0) = H_t \tilde{f}(r_0) \ , \qquad r_0 \in \pi^{-1}(x_0) \ .$$

命题 2.2 我们有

$$P_{t+s} f = P_t P_s f \quad , \quad \forall f \in C^\infty(M) \ , \tag{2.1}$$

$$\left\{ \frac{dP_t f(x)}{dt} \right\}_{t=0} = -\frac{1}{2}(\Delta_M f)(x) \ . \tag{2.2}$$

证明 (2.1) 直接由定义 2.1 及 $H_{t+s} = H_t \circ H_s$ 推出. (2.2) 由下式得到：

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{dP_t f(x_0)}{dt} \right\}_{t=0} &= \left\{ \frac{dH_t \tilde{f}(r_0)}{dt} \right\}_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{O}(M)} \tilde{f}(r_0) = -\frac{1}{2}\big(\Delta_M f\big) \circ \pi(r_0) \ . \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

下一命题概括了 P_t 的一些基本性质.

命题 2.3 (i) P_t 对称: $\int_M P_tf(x)g(x)dx = \int_M f(x)P_tg(x)dx$;

(ii)Riemann 测度是 P_t- 不变测度: $\int_M P_tf(x)dx = \int_M f(x)dx$;

(iii) P_t 可扩充到 $L^p(M,dx)$, 并且 $\|P_t\|_{L^p\to L^p} \le 1$.

证明 (i) 固定 $t>0$, 考虑函数

$$h(s) = \int_M P_{t-s}f(x)P_sg(x)dx\ ,$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{dh(s)}{ds} &= \frac{1}{2}\int_M (\Delta_M P_{t-s}f)(x)P_sg(x)dx - \frac{1}{2}\int_M P_{t-s}f(x)\Delta_M P_sg(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_M P_{t-s}f(x)\Delta_M P_sg(x)dx - \frac{1}{2}\int_M P_{t-s}f(x)\Delta_M P_sg(x)dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

于是 $h(s)$ 在 $[0,1]$ 上是常值函数. 特别地, $h(0)=h(t)$. (i) 得证.

(ii) 在 (i) 中令 $g=1$, 则 $\int_M P_tf(x)dx = \int_M f(x)dx$.

(iii) 由 $P_tf(x) = \mathbb{E}\big(f(\gamma_w(t,x))\big)$ 及 Hölder 不等式

$$|\,P_tf(x)\,|^p \le \mathbb{E}\big(\,|\,f\big(\gamma_w(t,x)\big)\,|^p\big) = P_t|f|^p(x),$$

我们有

$$\int_M |\,P_tf(x)\,|^p\,dx \le \int_M P_t|f|^p(x)dx = \int_M |f(x)|^p dx\ . \qquad \blacksquare$$

下面, 我们将使用偏微分方程理论中的 Weyl 引理来证明对应于 Laplace-Beltrami 算子的热核的存在性.

我们首先记 $p_t(x_0,dx)$ 为热半群 P_t 的转移概率

$$P_tf(x_0) = \int_M f(x)p_t(x_0,dx)\ .$$

定理 2.4 (i) $p_t(x,dx)$ 关于 M 上的 Riemann 测度绝对连续:

$$p_t(x_0,dx)=p_t(x_0,x)dx\ ;$$

(ii)$(t,x)\longmapsto p_t(x_0,x)$ 是定义在 $(0,+\infty)\times M$ 上的光滑函数;

(iii) $\frac{\partial p_t(x_0,x)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Delta_x p_t(x_0,x)$,

其中 Δ_x 表示 Δ_M 作用在 $x\longmapsto p_t(x_0,x)$ 上.

证明 令 $\varphi(t,x)$ 为 $(0,+\infty)\times M$ 上的具紧支集光滑函数, 取 $t_0>0$ 使得 $(t_0,x)\notin \mathrm{supp}\psi$, $\forall x\in M$. 于是由 Itô 公式:

$$\begin{aligned}0&=\varphi\big(t_0,\gamma_w(t_0,x_0)\big)=\tilde\varphi\big(t_0,r_w(t_0)\big)\\&=\sum_\alpha\int_0^{t_0}A_\alpha\tilde\varphi(s,r_w(s))dw^\alpha(s)+\int_0^{t_0}\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{O}(M)}\Big)\tilde\varphi(t,r_w(t))dt\\&=\sum_\alpha\int_0^{t_0}A_\alpha\tilde\varphi(s,r_w(s))dw^\alpha(s)+\int_0^{t_0}\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\Delta_M\Big)\varphi(t,\gamma_w(t))dt,\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中 $\tilde\varphi(t,r)=\varphi(t,\pi(r))$. 在上式两边取数学期望得

$$\begin{aligned}0&=\int_0^{t_0}ds\int_M\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\Delta_M\Big)\varphi\Big](t,x)p_t(x_0,dx)\\&=\int_{(0,+\infty)\times M}\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\Delta_M\Big)\varphi(t,x)p_t(x_0,dx)dt\ ,\end{aligned}\tag{2.4}$$

这表明 $p_t(x,dx)$ 是方程 $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)+\frac{1}{2}\Delta_M u(t,x)=0$ 的弱解. 此外, 由 Weyel 引理 (见 [Mc,p.85]) 知, $p_t(x_0,dx)=p_t(x_0,x)dx$, 且 $(t,x)\longmapsto p_t(x_0,x)$ 是光滑函数. 于是由 (2.4) 推得 (iii). 证毕. ∎

注 $p_t\in C^\infty(M\times M)$, 且 $p_t(x,y)>0$, $\forall(t,x,y)\in \mathbb{R}_+\times M\times M$.

§ 3. 微分形式的热方程

给定 M 上的微分形式 $\alpha\in E^1(M)$, 我们将研究它在什么情形下存在 $f\in C^\infty(M)$ 使得

$$df=\alpha.\tag{3.1}$$

首先，由 $d^2 f = 0$ 得知方程有解的必要条件为 $d\alpha = 0$(即 α 为闭的微分形式). 记 d^* 为 d 关于 Riemann 测度的伴随算子 (下面将给出确切定义), 则由 (3.1), f 满足下面方程:

$$d^* df = d^* \alpha,$$

或

$$d^*(df - \alpha) = 0.$$

于是，给定一闭微分形式 α, 如果 $f \in C^\infty(M)$ 是 (3.1) 的解，则

$$dd^*(df - \alpha) + d^* d(df - \alpha) = 0,$$

或

$$\Box(df - \alpha) = 0,$$

其中 $\Box = dd^* + d^* d$. 因此解方程 (3.1) 归结为求在什么样的几何条件下，算子 $\Box$ 的核 (即零空间) 退化为 $\{0\}$. 此外， $\Box$ 的零空间与流形 M 的拓扑性质有密切关系. 本节中，我们将通过研究热半群 $e^{-t\Box}$ 来得到热方程解的一些分析性质. 为确切定义 de Rham-Hodge 算子 $\Box$, 我们先考虑一般的 k 次微分形式 $E^k(M)$

给定 $\alpha \in E^k(M)$. 在局部坐标 $(U, x_1, \cdots, x_\alpha)$ 下,

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1} \cdots i_k dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \ \alpha_{i_1 \cdots i_k} \in C^\infty(U).$$

M 上的 Riemann 结构诱导 $E^k(M)$ 的一内积 $(\cdot \mid \cdot)_k$, 其相应的范数 $\|\cdot\|_k$ 定义如下:

$$|\alpha|_x^2 = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \cdots i_k} \sum_{i_1 < \cdots < j_k} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \alpha_{j_1 \cdots j_k}, \tag{3.2}$$

$$\|\alpha\|_k^2 = \int_M |\alpha|_x^2 \, dx. \tag{3.3}$$

定义 3.1 记 $d : E^K(M) \longrightarrow E^{k+1}(M)$ 为外微分算子，其伴随算子 $d^* : E^{k+1}(M) \longrightarrow E^k(M)$ 由下式给出:

$$(d\alpha \mid \beta)_{k+1} = (\alpha \mid d^* \beta)_k, \ \forall \alpha \in E^k(M). \tag{3.4}$$

$E^k(M)$ 上的 de Rham-Hodge 算子 $\square$ 定义为

$$\square = dd^* + d^*d\ . \tag{3.5}$$

由于 $d^2 = 0$, 显然有 $d\,\square = \square d$.

现在考虑一次微分形式 $E^1(M)$. 我们先介绍 Weitzenböck 公式. 为此将采用规范标架丛的数量化方法 (参阅 [M]).

记 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_d)$ 为 $\mathcal{O}(M)$ 上的基础微分形式, 给定 $\alpha \in E^1(M)$, 定义 $F_\alpha \in C^\infty\big(\mathcal{O}(M), \mathbb{R}^d\big)$:

$$F^i_\alpha(r) = \langle \theta_i, \pi^*\alpha\rangle_r\ , \tag{3.6}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_r$ 为余切空间 $T^*_r\mathcal{O}(M)$ 上的内积, 则 $F_i(r) = \langle \alpha, r\epsilon_i\rangle_{\pi(r)}$.

设 Z 为 M 上的向量场, 使得

$$\alpha(X)_x = \langle Z, X\rangle_x\ ,\ \forall X \in \mathcal{X}(M)\ .$$

命题 3.2 我们有

$$\big(A_j F^i_\alpha\big)(r) = \langle \nabla_{r\epsilon_j} Z, r\epsilon_i\rangle_{\pi(r)}\ .$$

证明 由 A_j 的构造, 假定 $\xi(t)$ 为从 $x = \pi(r)$ 点出发, 与 $r\epsilon_j$ 相切的 M 上的测地线, $r_j(t)$ 为 r 沿 $\xi(t)$ 的平行移动, 则

$$\begin{aligned}
\big(A_j F_i\big)(r) &= \left\{\frac{d}{dt} F^i_\alpha(r_j(t))\right\}_{t=0} \\
&= \left\{\frac{d}{dt}\langle Z_{\xi(t)}, , r_j(t)\epsilon_i\rangle\right\}_{t=0} \\
&= \left\{\frac{d}{dt}\langle t^\xi_{0\leftarrow t} Z_{\xi(t)}, r\epsilon_i\rangle\right\}_{t=0} \\
&= \left\langle \left\{\frac{d}{dt} t^\xi_{0\leftarrow t} Z_{\xi(t)}\right\}_{t=0}, r\epsilon_i\right\rangle_{\pi(r)} \\
&= \langle \nabla_{r\epsilon_j} Z, r\epsilon_i\rangle_{\pi(r)}\ .
\end{aligned}$$

∎

下面我们给出数量化后的 Weitzenböck 公式.

定理 3.3 我们有

$$F_{\square\alpha}(r) = -(\Delta_{\mathcal{O}(M)} F_\alpha)(r) + J(r) F_\alpha(r) , \tag{3.7}$$

其中 $J(r)$ 为 M 上 Ricci 曲率张量在 $\mathcal{O}(M)$ 上的表示：

$$J(r)a = -\sum_{i=1}^{d} \Omega(\epsilon_i, a)\epsilon_i \ , \ a \in \mathbb{R}^d . \tag{3.8}$$

证明 见 [M, p.108].

若记 $Z_\alpha \in \mathcal{X}(M)$ 对应于 $\alpha \in E^1(M)$, 则 (3.8) 等价于下面等式：

$$\int_M |\, d\alpha \,|_x^2 \, dx + \int_M |\, d^*\alpha \,|^2 \, dx = \int_M |\, \nabla Z_\alpha \,|_x^2 \, dx + \int_M \langle \mathrm{Ric}_x Z_\alpha, Z_\alpha \rangle_x dx, \tag{3.9}$$

其中 ∇Z 为对应于 Levi-Civita 连络的协变函数，我们有

$$|\, \nabla Z_\alpha \,|_x^2 = \sum_{i,j} \langle \nabla_{r\epsilon_i} Z_\alpha, r\epsilon_j \rangle_{\pi(r)}^2 .$$

证明 记 dr 为 $\mathcal{O}(M)$ 上的 Riemann 测度，由简单计算得

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}(M)} \langle F_{\square\alpha}(r), F_\alpha(r) \rangle dr &= \int_M \langle \square\alpha, \alpha \rangle_x dx \\ &= \int_M |\, d\alpha \,|_x^2 \, dx + \int_M |\, d^*\alpha \,|^2 \, dx .\end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{O}(M)} \langle J(r) F_\alpha(r), F_\alpha(r) \rangle dr = \int_M \langle \mathrm{Ric}_x Z_\alpha, Z_\alpha \rangle_x dx .$$

另一方面，由命题 3.2 得

$$\begin{aligned}-\int_{\mathcal{O}(M)} \langle \Delta_{\mathcal{O}(M)} F_\alpha, F_\alpha \rangle dr &= \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathcal{O}(M)} |\, A_i F_\alpha \,|^2 \, dr \\ &= \int_M |\, \nabla Z_\alpha \,|^2 \, dx .\end{aligned}$$

反之，由 (3.6) 得到

$$\int_{\mathcal{O}(M)}\langle F_{\square\alpha}(r),F_\alpha(r)\rangle dr = -\int_{\mathcal{O}(M)}\langle\Delta_{\mathcal{O}(M)}F_\alpha,F_\alpha\rangle dr+\int_M\langle J(r)F_\alpha,F_\alpha\rangle dr\ .$$

由二次型极化处理方法得：对任意 $\beta\in E^1(M)$,

$$\int_{\mathcal{O}(M)}\langle F_{\square\alpha}(r),F_\beta(r)\rangle dr = -\int_{(M)}\langle\Delta_{\mathcal{O}(M)}F_\alpha,F_\beta\rangle dr+\int_M\langle J(r)F_\alpha,F_\beta\rangle dr\ ,$$

由此可得 (3.7). ∎

现在考虑一组微分形式 $\alpha_t\in E^1(M)$, 使得对 $x\in M$, $\alpha_t(x)\in T_x^*M$(对任意 $t\geq 0$). 考虑热方程

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_t}{dt}&=-\frac{1}{2}\ \square\alpha_t,\\ \alpha_0&=\alpha\ .\end{aligned}\tag{3.10}$$

若记 $F(t,r)=F_{\alpha_t}(r)$, $F(0,r)=F_\alpha(r)$, 则 $F(t,r)$ 满足如下热方程：

$$\begin{aligned}\frac{dF(t,r)}{dt}&=\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{O}(M)}F(t,r)-\frac{1}{2}J(r)F(t,r)\ ,\\ F(0,r)&=F_\alpha(r)\ .\end{aligned}\tag{3.11}$$

事实上，

$$\begin{aligned}F^i_{\frac{d\alpha_t}{dt}}(r)&==\langle\frac{d\alpha_t}{dt},r\epsilon_i\rangle_{\pi(r)}\\ &=\frac{d}{dt}\langle\alpha_t,r\epsilon_i\rangle_{\pi(r)}=\frac{d}{dt}F^i_{\alpha_t}(r)\ .\end{aligned}$$

另外，再由 (3.7) 式，可从 (3.10) 右边导出 (3.11) 的右边.

定理 3.4 设 $r_w(t,r_0)$ 为 $\mathcal{O}(M)$ 上从 r_0 出发的水平 Brown 运动，$R_t(w)$ 满足线性常微分方程：

$$\begin{aligned}\frac{DR_t(w)}{dt} &= -\frac{1}{2}R_t(w)J\big(r_w(t)\big), \\ R_0(w) &= Id_{\mathbb{R}^d}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

则

$$F(t,r_0) = \mathbb{E}\big(R_tF_\alpha\big(r_w(t,r_0)\big)\big)\ . \tag{3.13}$$

证明 给定 $t>0$, 记 $w_t(\tau) = w(\tau+t)-w(t)$, 则

$$r_w(t,r_0) = r_{w_t}\big(0,r_w(t)\big).$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{dR_{t+\tau}(w)}{d\tau} &= -\frac{1}{2}R_{t+\tau}(w)J\big(r_w(t+\tau)\big) \\ &= -\frac{1}{2}R_{t+\tau}J\big(r_{w_t}\big(\tau,r_w(t)\big)\big)\ .\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}R_t(w)R_\tau(w_t) &= R_t(w)\Big(-\frac{1}{2}R_\tau(w_t)J\big(r_{w_t}\big(\tau,r_w(t)\big)\big)\Big) \\ &= -\frac{1}{2}R_t(w)R_\tau(w_t)J\big(r_{w_t}\big(\tau,r_w(t)\big)\big)\ .\end{aligned}$$

于是对几乎所有的 w, 有

$$R_{t+\tau}(w) = R_t(w)R_\tau(w_t)\ . \tag{3.14}$$

现在对任意 $f\in C^\infty\big(\mathcal{O}(M),\mathbb{R}^d\big)$, 记

$$H_tf(r_0) = \mathbb{E}\big[R_t(w)f\big(r_w(t,r_0)\big)\big]\ .$$

则

$$\begin{aligned}
H_{t+\tau}f(r_0) &= \mathbb{E}\big[R_{t+\tau}(w)f\big(r_w(t+\tau,r_0)\big)\big] \\
&= \mathbb{E}\big[R_t(w)R_\tau(w_t)f\big(r_{w_t}\big(\tau,r_w(t)\big)\big)\big] \\
&= \mathbb{E}\big[R_t(w)\mathbb{E}\big(R_\tau(w_t)\ f\big(r_{w_t}\big(\tau,r_w(t)\big)\big)\big|\mathcal{F}_t\big] \\
&= \mathbb{E}\big[R_t(w)H_\tau f\big(r_w(t)\big)\big] \\
&= H_tH_\tau f(r_0)\ ,
\end{aligned}$$

即 H_t 满足半群性质. 另一方面, 由 Itô 公式:

$$\begin{aligned}
dR_tf\big(r_w(t)\big) &= \frac{1}{2}R_tJ\big(r_w(t)\big)f\big(r_w(t)\big)dt \\
&\quad+\sum_{i=1}^d R_tA_if\big(r_w(t)\big)dw^i(t)+\frac{1}{2}R_t\Delta_{\mathcal{O}(M)}f\big(r_w(t)\big)dt \\
&=\sum_{i=1}^d R_tA_if\big(r_w(t)\big)dw^i(t) \\
&\quad+\frac{1}{2}R_t\big(\Delta_{\mathcal{O}(M)}-J\big(r_w(t)\big)\big)f\big(r_w(t)\big)dt\ ,
\end{aligned}$$

于是

$$H_tf(r_0)=\frac{1}{2}\int_0^t\mathbb{E}\big[R_t\big(\Delta_{\mathcal{O}(M)}-J\big(r_w(s)\big)\big]ds\ .$$

所以

$$\lim_{t\to0}\frac{H_tf(r_0)-f(r_0)}{t}=\frac{1}{2}\big(\Delta_{\mathcal{O}(M)}-J(r_0)\big)f(r_0)\ .$$

再由 H_t 的半群性质可知 H_tF_α 满足方程 (3.11). 由解的唯一性得到 (3.13). ∎

§ 4. 热半群的估计及其应用

定理 4.1 设 $P_t^1\alpha=\alpha_t$ 为方程 (3.10) 的解. 令

$$c=\inf_{r\in\mathcal{O}(M)}\inf\{\lambda_1(r),\cdots,\lambda_d(r)\},$$

其中 $\lambda_i(r)$ 为 $J(r)$ 的特征值，则

$$|P_t^1\alpha|_x \le e^{-\frac{ct}{2}} P_t|\alpha|(x) . \tag{4.1}$$

证明 任取 $Z \in T_{x_0}M$, 记 $Z_0 = r_0^{-1}Z \in \mathbb{R}^d$, 则

$$\begin{aligned}
\langle P_t^1\alpha, Z\rangle_{x_0} &= \sum_{i=1}^{d}\langle P_t^1\alpha, r_0\epsilon_i\rangle\langle Z, r_0\epsilon_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{d} F^i(t, r_0)Z_0^i = \langle F(t, r_0), Z_0\rangle \\
&= \mathbb{E}\left[\langle R_t(w)F_\alpha\left(r_w(t, r_0)\right), Z_0\rangle\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\langle F_\alpha\left(r_w(t, r_0)\right), R_t^*(w)Z_0\rangle\right] .
\end{aligned} \tag{4.2}$$

由 (3.12) 知

$$\begin{aligned}
\frac{dR_t^*(w)}{dt} &= \frac{1}{2}J\left(r_w(t, r_0)\right)R_t^*(w), \\
R_0^*(w) &= Id_{\mathbb{R}^d} .
\end{aligned}$$

令 $\psi(t) = |R_t^*Z_0|^2$, 则

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(t) &= 2\langle R_t^*(w)Z_0, -\frac{1}{2}J\left(r_w(t, r_0)R_t^*(w)Z_0\right\rangle \\
&= -\langle J\left(r_w(t, r_0)\right)R_t^*(w)Z_0, R_t^*(w)Z_0\rangle \\
&\le -c\psi(t) .
\end{aligned}$$

于是

$$\psi(t) \le e^{-ct}|Z_0|^2 .$$

由 (4.2),

$$\begin{aligned}
|\langle P_t^1\alpha, Z\rangle_{x_0} &\le \mathbb{E}\left[|f_\alpha\left(r_w(t, r_0)\right)||R_t^*(w)Z_0|\right] \\
&\le e^{-\frac{ct}{2}}|Z_0|\mathbb{E}\left[|F_\alpha\left(r_w(t, r_0)\right)|\right] \\
&= e^{-\frac{ct}{2}}|Z_0|\mathbb{E}\left[|\alpha|\left(r_w(t, x_0)\right)\right] \\
&= e^{-\frac{ct}{2}}P_t|\alpha|(x_0)|Z_0| .
\end{aligned}$$

由此推出 (4.1). ∎

下面给出定理 4.1 的几个应用，我们假定 $\int_M dx = 1$.

定理 4.2 若 $c > 0$, 则 $\{\alpha \in E^1(M) ; \square\alpha = 0\} = \{0\}$.

证明 设 $\square\alpha = 0$, 则 $\alpha_t = \alpha$ 是方程 (3.10) 的唯一解. 由 (4.1)

$$|\alpha|_x \le e^{-\frac{ct}{2}} P_t |\alpha|(x) .$$

于是

$$\begin{aligned}\int_M |\alpha|_x \, dx &\le e^{-\frac{ct}{2}} \int_M P_t |\alpha|(x) dx \\ &= e^{-\frac{ct}{2}} \int_M |\alpha|_x \, dx .\end{aligned}$$

由此推得 $\int_M |\alpha|_x \, dx = 0$, 即 $\alpha = 0$. ∎

注 当 $\square\alpha = 0$ 时， (3.9) 左边等于零. 于是对任意 $x \in M$,

$$\langle \mathrm{Ric}_x Z_\alpha, Z_\alpha \rangle_x = 0 .$$

由于 Ric_x 是正定的，所以 $Z_\alpha = 0$, 即 $\alpha = 0$.

下面我们给出上述 Bochner 定理的一个推广. 给定 $r_0 \in \mathcal{O}(M)$, 定义 $\mathcal{O}(M)$ 上的一个测度 $R_t(r_0, dr)$, 使得对任意 $f : \mathcal{O}(M) \to \mathbb{R}$, 有

$$\int_{CalO(M)} f(r) R_t(r, dr) = \mathbb{E}\left[\|R_t(w)\|_{\mathrm{End}} f(\left(r_w(t, r_0)\right)\right] . \tag{4.3}$$

定理 4.3 假定对任意 $r_0 \in \mathcal{O}(M)$, 存在 t_0 使得

$$R_{t_0}(r_0, \mathcal{O}(M)) < 1, \tag{4.4}$$

则

$$\{\alpha \in E^1(M) ; \square\alpha = 0\} = \{0\} . \tag{4.5}$$

证明 设 $\square\alpha = 0$, 由 (4.3) 得出下面均值公式:

$$F_\alpha(r_0) = \int_{\mathcal{O}(M)} F_\alpha(r) R_t(r_0, dr) , \forall t \ge 0 . \tag{4.6}$$

由 $\mathcal{O}(M)$ 的紧性，存在 $r_0 \in \mathcal{O}(M)$ 使得

$$\|F_\alpha(r_0)\| = \sup_{r\in\mathcal{O}(M)} \|F_\alpha(r)\| .$$

由 (4.6),

$$\|F_\alpha(r_0)\| \le \int_{\mathcal{O}(M)} \|F_\alpha(r)\| R_{t_0}(r_0, dr) \le \|F(r_0)\| R_{t_0}\big(r_0, \mathcal{O}(M)\big) .$$

于是由条件 (4.4) 得出 $\|F_\alpha(r_0)\| = 0$. 即 $F_\alpha(r) = 0, \forall r \in \mathcal{O}(M)$. 由此定理得证. ∎

定理 4.3 的一个直接结果就是将 Bochner 定理中的 Ricci 张量在每点是 正定 的条件放弱到只需存在一点，使得 Ricci 张量在此点是 正定的，在其他点是 非负定的. 事实上，设 $x_1 \in M$ 使得 $\mathrm{Ric}_{x_1} : T_{x_1}M \longrightarrow T_{x_1}M$ 是正定的，则存在 x_1 的一个开邻域 U, 使得对任意 $x \in U$, Ric_x 是正定的. 于是对任意 $r \in \pi^{-1}(U)$, 有

$$c(r) = \inf\{\lambda_1(r), \cdots, \lambda_d(r)\} > 0 .$$

现在任意给定 $r_0 \in \mathcal{O}(M)$, 由 Brown 运动的遍历性，存在 $t_0 > 0$ 使得

$$\mathbb{P}\{w : \; r_w(t_0, r_0) \in \pi^{-1}(U)\} > 0$$

另外，由定理 4.1 的证明可以看出

$$\|R_t(w)\|_{\mathrm{End}} \le e^{-c(r_w(\tau, r_0))} .$$

于是

$$\begin{aligned}
R_{t_0}\big(r_0, \mathcal{O}(M)\big) &= \mathbb{E}\big[\|r_{t_0}(w)\|_{\mathrm{End}}\big] \\
&= \mathbb{E}\big[I_{\pi^{-1}(U)}\big(r_w(t_0, r_0)\big)\|R_{t_0}(w)\|_{\mathrm{End}}\big] \\
&\quad + \mathbb{E}\big[I_{\pi^{-1}(U^c)}\big(r_w(t_0, r_0)\big)\|R_{t_0}(w)\|_{\mathrm{End}}\big] \\
&\le \mathbb{E}\big[I_{\pi^{-1}(U)}\big(r_w(t_0, r_0)\big)e^{-c(r_w(t_0, r_0))}\big] \\
&\quad + \mathbb{E}\big[I_{\pi^{-1}(U)}\big(r_w(t_0, r_0)\big)\big] \\
&< \mathbb{E}\big[\big(I_{\pi^{-1}(U)}\big(r_w(t_0, r_0)\big)\big] + \mathbb{E}\big[I_{\pi^{-1}(U)}\big(r_w(t_0, r_0)\big)\big] \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

所以定理 4.3 的条件 (4.4) 被验证，从而 (4.5) 成立.

由微分几何的知识我们知道，当 M 是紧致的时候，de Rham-Hodge 算子 $\square$ 实际上是一个紧算子 (参阅 [W, p.223])，所以它只有离散谱.

命题 4.4 记 λ_1 是 Δ 的第一个非零特征值 (即存在 $f \in C^\infty(M)$ 使得 $\Delta f = \lambda_1 f$)，则

$$\|P_t(F - \mathbb{E}(F))\|_{L^2} \le e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 t}\|F - \mathbb{E}(F)\|_{L^2}.$$

证明 可假定 $\mathbb{E}(F) = \int_M F(x)dx = 0$. 令 $h(t) = \mathbb{E}\big[\,|\,P_tF\,|^2\,\big]$，则

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= 2\mathbb{E}\Big[\Big\langle -\frac{1}{2}\Delta P_tF, P_tF\Big\rangle\Big]\\ &\le -\lambda_1\mathbb{E}\big[\,|\,P_tF\,|^2\,\big] = -\lambda_1 h(t)\ ,\end{aligned}$$

其中不等式由 Δ 的谱分解得出. 于是 $h(t) \le e^{-\lambda_1 t}h(0)$. ∎

利用 Weitzenböck 公式，可以用几何参数来估计 λ_1 的值.

命题 4.5 $\lambda_1 \ge c$.

证明 在 (3.9) 中令 $\alpha = df$，则 $d\alpha = d^2 f = 0$, $d^*\alpha = \Delta f$. 于是

$$\int_M |\,\Delta f\,|^2\,dx \ge c\int_M |\,\nabla f\,|^2\,dx = c\int_M \Delta f\cdot f dx\ .$$

由此推出 $\lambda_1 \ge c$. ∎

最后，我们给出对数 Sobolev 不等式，证明来自 [BL].

定理 4.6 对任意 $T > 0$, 及 $\forall f \in C^\infty(M)$ 我们有

$$P_T(f^2\log f^2) \le 4\Big(\frac{1-e^{-cT}}{c}\Big)P_T|\nabla f|^2 + P_T f^2\log P_T(f^2)\ . \qquad (4.7)$$

证明 记 $F = f^2$, 假定 $F > 0$,

$$P_T(F\log F) - P_TF\cdot\log P_TF = \int_0^T \frac{d}{ds}[P_s(P_{T-s}F\cdot\log P_{T-s}F)]ds\ .$$

而

$$P_s(P_{T-s}\log P_{T-s}F)=\int_M P_{T-s}F(y)\log P_{T-s}F(y)p_s(x,y)dy\ ,$$

所以

$$\begin{aligned}I_s&=\frac{d}{ds}[P_s(P_{T-s}F\cdot\log P_{T-s}F)]\\&=\frac{1}{2}\int_M\left[\left(\Delta P_{T-s}F\right)(y)\log P_{T-s}(y)+\left(\Delta P_{T-s}F\right)(y)\right]p_s(x,y)dy\\&\quad-\frac{1}{2}\int_M P_{T-s}F(y)\log P_{T-s}F(y)\Delta_y P_s(x,y)dy\ .\end{aligned}$$

由于

$$\Delta(G_1G_2)=(\Delta G_1)G_2+G_1\Delta G_2-2\langle\nabla G_1,\nabla G_2\rangle\ ,$$

故有

$$I_s=\frac{d}{ds}[P_s(P_{T-s}F\cdot\log P_{T-s}F)]=\int_M\frac{|\nabla P_{T-s}F|^2}{P_{T-s}F}P_s(x,y)dy\ . \tag{4.8}$$

由 $d\ \square=\ \square d$ 可得 $dP_t=P_t^1d$, 所以由 (4.2) 得·

$$\begin{aligned}|\nabla P_{T-s}F|^2=|dP_{T-s}F|^2&=|P_{T-s}^1dF|^2\\&\le e^{c(T-s)}\left(P_{T-s}|\nabla F|\right)^2\ .\end{aligned} \tag{4.9}$$

此外,

$$\begin{aligned}\left(P_{T-s}|\nabla F|\right)^2&=\left(\int_M|\nabla F|(m)P_{T-s}(y,m)dm\right)^2\\&=\left(\int_M\frac{|\nabla F|}{\sqrt{F}}\sqrt{F}P_{T-s}(y,m)dm\right)^2\\&\le\left(P_{T-s}\frac{|\nabla F|^2}{F}\right)P_{T-s}F\ .\end{aligned} \tag{4.10}$$

将 (4.9) 和 (4.10) 代入 (4.8) 得

$$I_s = \int_M e^{-c(T-s)} P_{T-s}\Big(\frac{|\nabla F|^2}{F}\Big)(y) P_s(x,y) dy$$
$$= e^{-c(T-s)} P_s\Big(P_{T-s}(\frac{|\nabla F|^2}{F})\Big)$$
$$= e^{-c(T-s)} P_T\Big(\frac{|\nabla F|^2}{F}\Big) .$$

而

$$\int_0^T e^{-c(T-s)} ds = \frac{1-e^{-cT}}{c} ,$$

所以我们有

$$P_T(F\log F) - P_T F \cdot \log P_T F \le \frac{1-e^{-cT}}{c} P_T\Big(\frac{|\nabla F|^2}{F}\Big) .$$

由于开始假定了 $F=f^2$, 故由上式得 (4.7). 对一般情形, 先考虑 $F_\epsilon = f^2+\epsilon$, 然后再令 $\epsilon \to 0$, 则证得 (4.7). ∎

注 定理 4.6 对 Ricci 张量没有作任何限制. 实际上, 在证明中我们只用到 Ricci 张量下界. 当 M 只是完备的 Riemann 流形时, 如

$$\text{Ricci} \ge -\alpha Id , \quad \alpha > 0 ,$$

则定理 4.6 仍然成立. 现在设 M 为紧流形. 如果 $c>0$, 则在 (4.7) 中令 $T\to+\infty$, 我们得到关于 Riemann 测度的对数 Sobolev 不等式:

$$\int_M f^2 \log f^2 dx \le \frac{4}{c}\int_M |\nabla f|^2 dx + \Big(\int_M f^2 dx\Big)\Big(\log \int_M f^2 dx\Big) .$$

§ 5. Brown 运动的分部积分公式

设 $\alpha_t \in E^1(M)$ 是热方程

$$\frac{d\alpha_t}{dt} = \frac{1}{2}\ \Box \alpha_t$$

的解，这里我们没有固定初值条件. 记 $F(t,r)=F_{\alpha_t}$，则 $F(t,r)$ 满足方程

$$\frac{\partial F(t,r)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{O}(M)}F(t,r)+\frac{1}{2}J(r)F(r)\ .$$

由 Itô 公式，

$$\begin{aligned}dR_tF\big(t,r_w(t)\big)&=\sum_{i=1}^{d}R_t\big(A_iF\big)\big(t,r_w(t)\big)dw^i(t)\\&\quad+R_t\Big(\frac{\partial}{\partial t}F\big(t,r_w(t)\big)+\frac{1}{2}\big(\Delta_{\mathcal{O}(M)}+J\big)F\big(t,r_w(t)\big)\Big)\\&=\sum_{i=1}^{d}R_t\big(A_iF\big)\big(t,r_w(t)\big)dw^i(t).\end{aligned}$$

所以有

$$R_tF\big(t,r_w(t)\big)-R_sF\big(s,r_w(s)\big)=\sum_{i=1}^{d}\int_s^tR_t\big(A_iF\big)\big(\tau,r_w(\tau)\big)dw^i(\tau)\ .$$

于是我们得到

命题 5.1 我们有

$$F\big(s,r_w(s)\big)=\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\big(R_s^{-1}R_tF\big(t,r_w(t)\big)\big)\ . \tag{5.1}$$

证明 见 [AM].

定理 5.2 对任意 $f\in C^\infty(M)$, 我们有

$$f\big(\gamma_w(t)\big)=\mathbb{E}f\big(\gamma_w(t)\big)+\int_0^t\langle\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\big(R_\tau^{-1}R_tr_w^{-1}(t)\nabla f\big(\gamma_w(t)\big)\big),dw(\tau)\rangle\ . \tag{5.2}$$

证明 考虑热方程

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\frac{1}{2}\Delta_Mu(t,x)\ ,$$
$$u(0,x)=f(x)\ .$$

由 Itô 公式

$$u\big(t,\gamma_w(t)\big) = u\big(s,\gamma_w(s)\big) + \sum_{i=1}^{d}\int_s^t A_i\tilde{u}\big(\tau, r_w(\tau)\big)dw^i(\tau) \tag{5.3}$$

得

$$u\big(s,\gamma_w(s)\big) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[u\big(t,\gamma_w(t)\big)\right], \tag{5.4}$$

其中 $\tilde{u}(t,r) = u(t,\pi(r))$. 而

$$\begin{aligned} A_i\tilde{u}\big(\tau,r_w(\tau)\big) &= \langle du\big(\tau,\gamma_w(\tau)\big), r_w(\tau)\epsilon_i\rangle \\ &= F^i_{du}\big(\tau, r_w(\tau)\big), \end{aligned} \tag{5.5}$$

易见 $du(t,x)$ 满足热方程 $\frac{d\alpha_t}{dt} = \frac{1}{2}\,\square\alpha_t$. 于是由 (5.1),

$$F_{du}\big(\tau,r_w(\tau)\big) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\left[R_\tau^{-1}R_tF_{du}\big(t,r_w(t)\big)\right]. \tag{5.6}$$

将 (5.4) — (5.6) 代入 (5.3) 中，则有

$$u\big(t,\gamma_w(t)\big)=\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[u(t,\gamma_w(t))\right]+\int_s^t\langle E^{\mathcal{F}_\tau}\left(R_\tau^{-1}R_tF_{du}(t,r_w(t))\right), dw(\tau)\rangle.$$

将 ∇f 与 df 等同起来，则 $F_{df}(r) = r^{-1}\nabla f(x)$, $x = \pi(x)$. 于是在上式中令 $s=0$, 由终端条件推得 (5.2) 式. ∎

推论 5.3 设 $(u(s,w))$ 为一取值于 $\mathbb{R}^d$ 的适应过程. 如果它满足 $\mathbb{E}\int_0^t |u(s,w)|^2ds < +\infty$, 则 $\forall f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[f\big(\gamma_w(t)\big)\int_0^t\langle\hat{u}(s,w), dw(s)\rangle\Big] \\ &\quad = \mathbb{E}\Big[\int_0^t\langle\nabla f(\gamma_w(t)), r_w(t)u(s,w)\rangle ds\Big], \end{aligned} \tag{5.7}$$

其中

$$\hat{u}(s,w) = u(w,w) + \frac{1}{2}J\big(r_w(s)\big)\int_0^s u(\tau,w)d\tau\ . \tag{5.8}$$

证明 由 (5.8) 及 $\sup_{r\in\mathcal{O}(M)}\|J(r)\|_{\mathrm{End}} < +\infty$, 容易验证

$$\mathbb{E}\int_0^t |\hat{u}(s,w)|^2\, ds < +\infty .$$

利用 (5.2) 和 Itô 随机积分能量等式，得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[f\big(\gamma_w(t)\big)\int_0^1 \langle \hat{u}(s,w), dw(s)\rangle\Big]\\ &\qquad = \mathbb{E}\Big[\int_0^t \langle R_\tau^{-1}R_t r_w^{-1}(t)\nabla f\big(\gamma_w(t)\big), \hat{u}(\tau,w)\rangle d\tau\Big] .\end{aligned}$$

易见 $Q_{t,\tau} = (R^{-1}\tau R_t)^*$ 满足下面预解方程:

$$\begin{aligned}\frac{dQ_{s,\tau}}{ds} &= -\frac{1}{2}J\big(r_w(s)\big)Q_{s,\tau} \quad (s>\tau) ,\\ Q_{\tau,\tau} &= Id_{\mathbb{R}^d} .\end{aligned} \tag{5.9}$$

故有

$$\begin{aligned}&\int_0^t \langle R_\tau^{-1}R_t r_w^{-1}(t)\nabla f\big(\gamma_w(t)\big), \hat{u}(\tau,w)\rangle d\tau\\ &\qquad = \int_0^t \langle \nabla f\big(\gamma_w(t)\big), r_w(t)\big(R_\tau^{-1}R_t\big)^*\hat{u}(\tau,w)\rangle d\tau\\ &\qquad = \langle \nabla f\big(\gamma_w(t)\big), r_w(t)u(t,w)\rangle .\end{aligned}$$

于是 (5.7) 得证. ∎

§ 6. Bismut 的热核梯度表达式

定理 6.1(Bismut 公式) 令 $p_t(x,y)$ 为 M 上的热核. 我们有

$$\frac{\nabla_x p_t(x,y)}{p_t(x,y)} = \frac{1}{t}\mathbb{E}\Big[\int_0^t R_\tau dw(\tau)\,|\,\gamma(t)=y\Big] . \tag{6.1}$$

证明 任取 $X \in T_xM$, 令 $Z(\tau, w) = \frac{\tau}{t} Q_{\tau,0}X$. 我们有

$$\dot{Z}(\tau, w) = \frac{1}{t} Q_{\tau,0}X + \frac{\tau}{t}\left(-\frac{1}{2} J(r_w(\tau)) Q_{\tau,0}X\right)$$
$$= \frac{1}{t} Q_{\tau,0}X - \frac{1}{2} J(r_w(\tau)) Z(\tau, w) .$$

于是

$$\hat{\dot{z}}(\tau, w) = \frac{1}{t} Q_{\tau,0}X .$$

应用 (5.7) 得

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t \langle \nabla f(\gamma_w(t)), \gamma_w(t)\dot{Z}(\tau, w)\rangle d\tau\Big]$$
$$= \frac{1}{t}\mathbb{E}\Big[f(\gamma_w(t))\int_0^t \langle Q_{\tau,0}X, dw(\tau)\rangle\Big] .$$

但是

$$\int_0^t \dot{Z}(\tau, w) d\tau = Z(t, w) = Q_{t,0}X ,$$

故有

$$\mathbb{E}[\langle \nabla f(\gamma_w(t)), r_w(t) Q_{t,0}X\rangle] = \frac{1}{t}\mathbb{E}\Big[f(\gamma_w(t))\int_0^t \langle Q_{\tau,0}X, dw(\tau)\rangle\Big] . \tag{6.2}$$

由 (5.9) 知 $Q_{t,0} = R_t^*$, 故从 (6.2) 得

$$\langle \mathbb{E}\big(R_t r_w^{-1}(t) \nabla f(\gamma_w(t))\big), X\rangle = \Big\langle \frac{1}{t}\mathbb{E}\Big[f(\gamma_w(t))\int_0^t R_\tau dw(\tau)\Big], X\Big\rangle . \tag{6.3}$$

在定理 3.4 中令 $\alpha = df$, 并将 df 与 ∇f 由下式等同起来:

$$df(x)X = \langle \nabla f(x), X\rangle_x . \quad \forall X \in T_xM ,$$

则由 $dP_t = P_t^1 d$ 得到

$$\langle \nabla P_t f(x), X\rangle_x = \langle \mathbb{E}\big(R_t r_w^{-1}(t) \nabla f(\gamma_w(t))\big), X\rangle , \tag{6.4}$$

另一方面，

$$\langle \nabla P_t f(x), X\rangle_x = \int_M f(y)\langle \nabla_x p_t(x,y), X\rangle dy \ . \tag{6.5}$$

综合 (6.3) — (6.5) 得到

$$\begin{aligned}\int_M f(y)\nabla_x p_t(x,y)dy &= \int_M f(y)\frac{\nabla_x p_t(x,y)}{p_t(x,y)}p_t(x,y)dy \\ &= \frac{1}{t}\int_M f(y)\mathbb{E}\Big[\int_0^t R_\tau dw(\tau)\Big|\gamma_w(t)=y\Big]p_t(x,y)dy \ .\end{aligned}$$

由于 $f\in C^\infty(M)$ 是任意的，所以

$$\frac{\nabla_x p_t(x,y)}{p_t(x,y)} = \frac{1}{t}\mathbb{E}\Big[\int_0^t R_\tau dw(\tau)\Big|\gamma_w(t)=y\Big] \ .$$

∎

第四章 轨道空间随机分析初步

最近几年， Riemann 流形上轨道空间的研究相当活跃. 从某种义意来说，它是 Malliavin 随机变分方法在非线性情形的发展. 本章的安排是这样的：在第一节，我们介绍 Wiener 测度和 Itô 映射. Itô 映射在这里可以理解为轨道空间的整体坐标系，但它不保持微分结构. 在第二节，我们引进切空间的概念及 Riemann 结构. 这是与有限维流形完全不同的情形，即切空间是一个 "非常小的" 空间. 在第三节，我们将建立分部积分公式. 我们所采用的是 Bismut 的 Girsanov 变换方法，这样避免了证明拟不变变换流的存在. 在第四节， Ocône 公式将由分部积分公式导出. 在第五节中，我们将介绍轨道空间上的 O.U. 算子，它是连接分析理论和概率论的桥梁. 最后，在第六节中，我们将对前五节进行评论，并介绍有关内容的最新进展.

§ 1. Wiener 测度及 Itô 映射

给定一紧致流形 M, 固定一点 $m_0 \in M$, 我们将考虑如下轨道空间：

$$\mathbb{P}_{m_0}(M) = \left\{\gamma \ : \ [0,1] \longrightarrow M \text{是连续的}; \ \gamma(0) = m_0\right\}.$$

我们选取 M 上的 Levi-Civita 连络. 记 $p_t(x,y)$ 为 M 上的热核.

定义 1.1 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上一函数 F 称为柱函数，如果存在 $0 \le \tau_1 < \cdots < \tau_k \le 1$, 及 $f \in C^\infty(M^k)$, 使得

$$F(\gamma) = f\big(\gamma(\tau_1), \cdots \gamma(\tau_k)\big) \ , \ \forall \gamma \in \mathbb{P}_{m_0}(M) \ . \tag{1.1}$$

我们记 $\mathcal{C}\big(\mathbb{P}_{m_0}(M)\big)$ 为 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上柱函数组成的空间. 如果

赋予 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 一致拓扑结构:

$$d(\gamma_1,\gamma_2)=\sup_{\tau\in[0,1]} d\big(\gamma_1(\tau),\gamma_2(\tau)\big) ,$$

其中 d 为流形 M 上的 Riemann 度量, 则 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上的 Borel σ- 代数由所有柱函数生成. 由 Kolmogorov 测度构造定理知, 在 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上存在唯一的 Borel 测度 ν, 使得 $\forall F\in\mathcal{C}\big(\mathbb{P}_{m_0}(M)\big)$, 若 F 由 (1.1) 给出, 则

$$\int_{\mathbb{P}_{m_0}(M)} F(\gamma)d\nu(\gamma)=$$
$$\int_{M^k} f(m_1,\cdots,m_k)p_{\tau_1}(m_0,m_1)\cdots p_{\tau_k-\tau_{k-1}}(m_{k-1},m_k)dm_1\cdots dm_k,$$

这里 dm_i $(i=1,\cdots,k)$ 记 M 上的 Riemann 测度.

命题 1.2 记 $\{\gamma_w(\tau)\,(0\le\tau\le1)\}$ 为 M 上从 m_0 出发的 Brown 运动, 则

$$\mathbb{E}\big(F(\gamma_w)\big)=\mathbb{E}\big(f\big(\gamma_w(\tau_1),\cdots\gamma_w(\tau_k)\big)\big)=\int_{\mathbb{P}_{m_0}(M)} F(\gamma)d\nu(\gamma) . \tag{1.2}$$

证明 先假定 $f(m_1,\cdots,m_k)=f_1(m_1)\cdots f_k(m_k)$, 其中 f_i 为有界的 Borel 函数. 由 $\gamma_w(\tau)$ 的马氏性, 我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big(f(\gamma_w(\tau_1),\cdots,\gamma_w(\tau_k))\big)\\&\quad=\mathbb{E}\big[f_1\big(\gamma_w(\tau_1)\big),\cdots f_{k-1}\big(\gamma_w(\tau_{k-1})\big)\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t_{k-1}}}\big(f_k\big(\gamma_w(\tau_k)\big)\big)\big]\\&\quad=\mathbb{E}\big[f_1\big(\gamma_w(\tau_1)\big)\cdots f_{k-1}\big(\gamma(\tau_{k-1})\big)\big(P_{\tau_k-\tau_{k-1}}f_k\big)\big(\gamma_w(\tau_{k-1})\big)\big] .\end{aligned}$$

故由归纳法可证得 (1.2) 式. 由于形如 $f_1\otimes\cdots\otimes f_k$ 的 Borel 函数在 $L^1(\mathbb{P}_{m_0}(M),d\nu)$ 中稠密, 于是 (1.2) 式对一般 F 仍成立. ∎

由于 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 类似于"无穷维的流形", 我们希望它存在一个坐标系, Wiener 空间正好扮演这个角色. 值得说明的是, 在这里由于测度的引进, 具体地讨论一条连续轨道就变得无意义了. 微

分几何的局部坐标在这里变得非常复杂，因为很难保持 Wiener 测度的拟不变性．然而，$\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 具有另外一种形式的好结构，它有一个 σ- 代数流 N_τ.

在前章的讨论中，我们并没有具体引进 Wiener 空间，因为在那里使用一般的 Brown 运动是方便的 (譬如马氏性的证明)．记

$$W = \{w : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^d \text{连续}; w(0) = 0\}.$$

从原点出发的 $\mathbb{R}^d$ 上 Brown 运动诱导 W 上一个 Borel 概率测度 μ(类似于上面的构造), 这里 $p_t(x,y) = \exp\{\frac{-\|x-y\|^2}{(\sqrt{2\pi t})^d}\}$, 它称为 Wiener 测度．由第二章，Itô 随机微分方程的解可以看作 Wiener 空间上的泛函.

定义 1.3 Itô 泛函 I: $W \to \mathbb{P}_{m_0}(M)$ 定义如下：

$$I(w)(\tau) = \gamma_w(\tau) \ , \ \forall \tau \in [0,1] \ .$$

由命题 1.2 知：$\nu = I_*\mu$, 即 $\nu(B) = \mu(I^{-1}(B))$.

定理 1.4 Itô 泛函 I 是测度意义下的同构映射，即存在可测映射 $J : \mathbb{P}_{m_0} \to W$ 使得：

(i) $J_*\nu = \mu$;

(ii) $J \circ I(w) = w$, μ-a.e. 及 $I \circ J(\gamma) = \gamma$, ν-a.e..

证明 由命题 1.2 知，I 是几乎满射的，即 $\nu(I(W)) = 1$. 令 w_n 为 w 的逐段光滑化：

$$\dot{w}_n(\tau) = 2^n\big(w\big((k+1)2^{-n}\big) - w\big(k2^{-k}\big)\big) \ ; \tau \in [k2^{-n}, (k+1)w^{-n}) \ .$$

记 $r_n(w,\tau)$ 为如下方程的解：

$$\dot{r}_n(w,\tau) = \sum_{i=1}^{d} A_i\big(r_n(w,\tau)\big)\dot{w}_n^i(\tau),$$
$$r_n(w,0) = r_0.$$

我们知道,

$$\langle \theta, \dot{r}_n(w,\tau)\rangle_{\gamma_n(w,\tau)} = \dot{w}_n(\tau),$$
$$\langle \omega, \dot{r}_n(w,\tau)\rangle_{\gamma_n(w,\tau)} = 0,$$

其中 $\gamma_n(w,\tau) = \pi\big(r_n(w,\tau)\big)$, 于是有

$$\dot{w}_n(\tau) = r_n^{-1}(w,\tau)\dot{\gamma}_n(w,\tau) \ ,$$

即有

$$w_n(\tau) = \int_0^\tau r_n^{-1}(w,t)\dot{\gamma}_n(w,t)dt \ .$$

由极限定理知, 关于 $\tau \in [0,1]$ 一致地,

$$r(w,\tau) = \lim_{n\to+\infty} r_n(w,\tau) \ , \quad \gamma(w,\tau) = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n(w,\tau) \ ,$$

且 (参见 [IW,p.399])

$$\int_0^\tau r_w^{-1}(t) \circ d\gamma_w(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\tau r_0^{-1}(w,t)\dot{\gamma}_n(w,t)dt \ .$$

于是有

$$w(\tau) = \int_0^\tau r_w^{-1}(t) \cdot d\gamma_w(t). \tag{1.3}$$

若令

$$J(\gamma_w) = \int_0^\cdot r_w^{-1}(t) \cdot d\gamma_w(t) \ ,$$

则它满足定理中的 (i) 和 (ii). ∎

由定理 1.4, 以后我们将采用 w, r, γ 这几个记号, 而不明确解释它们之间的一一对应关系.

§ 2. 切空间及 Riemann 结构

我们仍用方向导数来引进切空间，与微分几何不同的是我们所处理的函数仅是通常意义下的可测函数. 我们先看 Wiener 空间的情况. 给定 $h \in W$ 及 W 上一可测函数 F. 要使得式子 $F(w+th)$ 有意义，平移算子 $\tau_{th}: E \longrightarrow E, \tau_{th}(w) = w + th$ 必须保持 Wiener 测度的某种不变性 (在无穷维向量空间中， Lebesgue 测度是不存在的). Cameron-Martin 定理告诉我们:

$$(\tau_{th})_* \mu = k\mu \text{ ,当且仅当} h \in \mathbb{H} \text{ ,}$$

其中

$$\mathbb{H} = \left\{ h \in W \ : \ h(t)\text{绝对连续且} \int_0^1 |\dot{h}(\tau)|^2 \, d\tau < +\infty \right\}.$$

于是只有当 $h \in \mathbb{H}$ 时，才有可能定义某种意义下的方向导数. 我们称 $\mathbb{H}$ 为 W 的 切空间. 类似地，记

$$\mathbb{H} = \left\{ h : [0,1] \longrightarrow T_{m_0}M \ : \ \int_0^1 |\dot{h}(\tau|^2_{T_{m_0}M} \, d\tau < +\infty \right\}.$$

定义 2.1 可测 TM- 值随机过程 $Z(\gamma,\tau) \in T_{\gamma(\tau)}M$ 称为 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 的 向量场, 如果它满足下述条件:

(i) 若记 $z_0(\gamma,\tau) = t^{\gamma}_{0\leftarrow\tau} Z(\gamma,\tau)$, 则 $z_0(\gamma,\cdot) \in \mathbb{H}$, ν-a.e.;

(ii) $\mathbb{E}\left(\int_0^1 |\dot{z}_0(\gamma,\tau)|^2 \, d\tau\right) < +\infty$.

进一步，如果 $z_0(\gamma_w,\tau)$ 关于 σ- 代数流 $(\mathcal{F}_\tau)$ 是适应的，则称 $Z(\gamma,\tau)$ 为 适应向量场. 我们将记 $\mathcal{X}$ 为 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上的向量场空间， $\mathcal{X}_a$ 为适应向量场空间.

由上面定义容易看出， Itô 随机平行移动 $t^{\gamma}_{\tau\leftarrow 0}$ 诱导空间上的内积:

$$(Z_1, Z_2)_\gamma = \int_0^1 (\dot{z}_1(\gamma,\tau), \dot{z}_2(\gamma,\tau)_{T_{m_0}M} d\tau \text{ ,}$$

其中 $z_i(\gamma\tau) = t^{\gamma}_{0\leftarrow\tau} Z_i(\gamma, \tau)$, $(i = 1, 2)$, $\gamma \longmapsto \langle Z_1, Z_2 \rangle_\gamma$ 是一可测函数. 我们定义: $\|Z\|_2^2 = \mathbb{E}(\langle Z, Z \rangle_\gamma)$.

定理 2.2 给定 $Z \in \mathcal{X}_a$, 记 $z_0(\gamma, \tau) = t^{\gamma}_{0\leftarrow\tau} Z(\gamma, \tau)$, 假定存在 $c > 0$ 使得 $\int_0^1 |\dot{z}_0(w, s)|^2 ds \le c < +\infty$, 则存在 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上一个变换 σ_t, 满足

(i) $(\sigma_t)_* \nu = k_t \nu$, $k_t \in \cap_{p>1} L^p(\mathbb{P}_{m_0}(M))$;

(ii) $\left\{ \frac{d\sigma_t(\gamma)(\tau)}{dt} \right\}_{t=0} = Z(\gamma, \tau)$.

证明 令 $z(w, \tau) = r_w^{-1}(\tau) Z(\gamma_w, \tau)$, 考虑 $\mathbb{R}^d$ 上一适应随机过程 $\hat{z}(w, \tau)$, 其定义如下:

$$\dot{\hat{z}}(w, \tau) = \dot{z}(w, \tau) + \frac{1}{2} J\big(\gamma_w(\tau)\big) z(w, \tau) . \tag{2.1}$$

由 $\mathcal{O}(M)$ 的紧性, $\sup_{r \in \mathcal{O}(M)} \|J(r)\|_{End} < +\infty$, 于是从 (2.1) 容易看出, 存在 $c_1 > 0$ 使得

$$\int_0^1 |\, \dot{\hat{z}}(w, \tau) \,|^2 \, d\tau \le c_1 \int_0^1 |\, \dot{z}(w, \tau \,|^2 \, d\tau \le c_1 c . \tag{2.2}$$

记

$$q_z(w, \tau) = -\int_0^\tau \Omega_{r_w(s)}\big(\circ\, dw(s), z(w, s) \big) .$$

由曲率张量 Ω 的性质, 我们知道 $q_z(w, \tau)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的反对称矩阵. 对任意 $t > 0$ 定义 $\varphi_t^z : W \longrightarrow W$ 如下:

$$\varphi_t^z(w)(\tau) = \int_0^\tau e^{t q_z(w, s)} dw(s) + t \hat{z}(w, \tau) . \tag{2.3}$$

因为 $e^{t q_z(w,s)} \in \mathcal{O}(d)$, 故对固定 τ,$t \longmapsto y_t(w, \tau) = \int_0^\tau e^{t q_z(w,s)} dw(s)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 Brown 运动. 现在根据 Girsanov 定理知

$$(\varphi_t^z)_* \mu = \tilde{k}_t \mu .$$

此外，若记

$$\tilde{\rho}_t(w) = \exp\left\{ -t\int_0^1 \langle \dot{z}(w,s) dy_t(w,s) \rangle - \frac{1}{2}t^2 \int_0^1 |\dot{z}(w,s)|^2 ds \right\},$$

则对 W 上任意有界 Borel 函数 F,

$$\mathbb{E}\big(F(\varphi_t^z)\tilde{\rho}_t\big) = \mathbb{E}(F).$$

现在我们定义 $\sigma_t : \mathbb{P}_{m_0}(M) \longrightarrow \mathbb{P}_{m_0}(M)$ 如下:

$$\sigma_t = I \circ \varphi_t \circ J.$$

则由定理 1.4 有

$$(\sigma_t)_* \nu = k_t \nu.$$

我们现在着手证明 (i). 首先，对 $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\rho}_t^\lambda(w) = \exp\Big(-\lambda t \int_0^1 \langle \dot{z}(w,s), dy_t(w;s) \rangle - \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 \int_0^1 |\dot{z}(w,s|^2 ds \Big)$$
$$\times \exp\left\{ \frac{1}{2}(\lambda^2 t^2 - \lambda t) \int_0^1 |\dot{z}(w,s)|^2 ds \right\}.$$

由 Novikov 定理 (见 [H]),

$$\tau \longmapsto \exp\Big(\lambda t \int_0^\tau \langle \dot{z}(w,s), dy_t(w,s) \rangle - \frac{1}{2}\lambda^2 t2 \int_0^\tau |\dot{z}(w,s)|^2 ds \Big)$$

是一个鞅，再由 (2.2) 得

$$E(\tilde{\rho}_t^\lambda) < +\infty.$$

令 $\rho_t = \tilde{\rho}_t \circ J$, 则 $\mathbb{E}(\rho_t^\lambda) < +\infty$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. 现在任取 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上有界可测函数 F, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_{P_{m_0}(M)} F(\gamma) d(\sigma_t)_* \nu &= \int_{\mathbb{P}_{m_0}(M)} F(\gamma) k_t(\gamma) d\nu(\gamma) \\
&= \int_{\mathbb{P}_{m_0}(M)} F(\sigma_t) k_t(\sigma_t) \rho_t d\nu \\
&= \int_{\mathbb{P}_{m_0}(M)} F(\gamma) k_t(\gamma) \hat{\rho}_t(\gamma) d(\sigma_t)_* \nu,
\end{aligned}$$

其中 $\hat{\rho}_t(\gamma) = \mathbb{E}(\rho_t|\sigma_t)$ 为关于 σ_t 的条件期望，由此得到

$$k_t^2 \hat{\rho}_t = k_t \ .$$

于是由 Fubini 定理得

$$\mathbb{E}(k_t^p) = \mathbb{E}(\hat{\rho}_t^{-p}) = \int_0^\infty p u^{-(p+1)} \mathbb{P}(\hat{\rho}_t < u) du \ .$$

由上式知，为证 (i) 只需证明： $\forall k > 0$ 存在 $c_k > 0$ 使得 $\mathbb{P}(\hat{\rho}_t < u) \leq c_k u^k$. 为此，任取 $\delta > 0$, 我们有

$$\mathbb{P}(\hat{\rho}_t < u) = \mathbb{P}(\hat{\rho}_t < u, \rho_t \geq \delta) + \mathbb{P}(\hat{\rho}_t < u, \rho_t < \delta) \ . \tag{2.4}$$

由 Chebyshev 不等式得

$$\mathbb{P}(\hat{\rho}_t < u, \rho_t < \delta) \leq \mathbb{P}(\rho_t < \delta) \leq \mathbb{E}(\rho_t^{-k} \delta^k)$$

此外有

$$\mathbb{P}(\hat{\rho}_t < u, \rho_t \geq \delta) = \mathbb{E}\big(\mathbb{P}(\rho_t \geq \delta | \sigma_t; \hat{\rho}_t < u)\big).$$

由于 $\mathbb{E}(\rho_t|\sigma_t) \geq \delta \mathbb{P}(\rho_t \geq \delta|\sigma_t)$, 所以

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{P}(\rho \geq \delta|\sigma_t), \hat{\rho}_t < u\big) \leq \frac{1}{\delta} \mathbb{E}(\hat{\rho}_t; \hat{\rho}_t < u) \leq \frac{u}{\delta} \mathbb{P}(\hat{\rho}_t < u) \ .$$

取 $\delta = 2u$, 则由 (2.4) 得

$$\mathbb{P}(\hat{\rho}_t < u) \leq \mathbb{E}(\rho_t^{-k}) 2^{k+1} u^k \ .$$

因此 (i) 得证.

为证 (ii), 我们先对 $r(w, \tau)$ 关于 φ_t^z 进行变分计算. 我们有

$$\begin{aligned} \left\langle \theta, \left\{ \frac{d}{dt} r(\varphi_t^z, t) \right\}_{t=0} \right\rangle_{r_w(\tau)} &= z(w, \tau), \\ \left\langle \omega, \left\{ \frac{d}{dt} r(\varphi_t^z, \tau) \right\}_{t=0} \right\rangle_{r_w(\tau)} &= -q_z(w, \tau). \end{aligned} \tag{2.5}$$

详细证明请参考 [FM, 257−260]. 现在由 (2.5) 得

$$\begin{aligned}\left\{\frac{d\sigma_t(\tau)}{dt}\right\}_{t=0} &= d\pi\big(r_w(\tau)\big)\cdot\left\{\frac{d}{dt}r(\varphi_t^z,\tau)\right\}_{t=0}\\ &= r_w(\tau)\left\langle\theta,\left\{\frac{d}{dt}r(\varphi_t^z,\tau)\right\}_{t=0}\right\rangle_{r_w(\tau)}\\ &= r_w(\tau)z(w,\tau)=Z(\gamma,\tau)\ .\end{aligned}$$

∎

§ 3. 分部积分公式

现在给定 $F\in\mathcal{C}\big(\mathbb{P}_{m_0}(M)\big)$, 其表达式如下:

$$F(\gamma)=f\big(\gamma(\tau_1),\cdots,\gamma(\tau_k)\big)\ ,\ f\in C^\infty(M^k)\ .$$

取 $Z\in\mathcal{X}_a$ 满足定理 2.2 的条件, 我们定义

$$\big(D_ZF\big)(\gamma))=\lim_{t\to0}\frac{F\big(\sigma_t(\gamma)\big)-F(\gamma)}{t}\ ,$$

则容易看出

$$\begin{aligned}\big(D_ZF\big)(\gamma) &= \sum_{i=1}^k\left\langle\nabla_iF(\gamma),\left\{\frac{d\sigma_t(\gamma)(\tau_i)}{dt}\right\}_{t=0}\right\rangle\\ &= \sum_{i=0}^k\langle\nabla_iF(\gamma),Z(\gamma,\tau_i)\rangle_{\gamma(\tau_i)}\ ,\end{aligned}$$

其中 ∇_iF 表示沿第 i 分量求的梯度. 由于

$$\begin{aligned}Z(\gamma,\tau_i) &= t^\gamma_{\tau_i\leftarrow0}\int_0^{\tau_i}\dot z_0(\gamma,s)ds\\ &= \int_0^1 I_{(s\le\tau_i)}t^\gamma_{\tau_i\leftarrow s}\dot Z(\gamma,s)ds\ ,\end{aligned}$$

这里 $\dot{Z}(\gamma,s)=t^{\gamma}_{s\leftarrow 0}\dot{z}_0(\gamma,s)$. 于是

$$(D_Z F)(\gamma)=\int_0^1\Big\langle\sum_{i=1}^{k}\big(t^{\gamma}_{s\leftarrow\tau_i}\nabla_i F(\gamma)\big)I_{(s<\tau_i)},\dot{Z}(\gamma,s)\Big\rangle_{\gamma(s)}ds\ .$$

定义 3.1 给定 $F\in\mathcal{C}(\mathbb{P}_{m_0}(M))$, 其梯度 $D_sF(\gamma)$ 定义如下:

$$D_sF(\gamma)=\sum_{i=1}^{k}\big(t^{\gamma}_{s\leftarrow\tau_i}\nabla_i F(\gamma)\big)I_{(s<\tau_i)}\ .$$

我们有关系式:

$$D_ZF(\gamma)=\int_0^1\langle D_sF(\gamma),\dot{Z}(\gamma,s)\rangle_{\gamma(s)}ds.$$

注 对 $h\in\mathbb{H}$, 我们记 $D_hF=D_{Z_h}F$, $Z_h(\gamma,\tau)=t^{\gamma}_{\tau\leftarrow 0}h(\tau)$.

定理 3.2 对任意 $Z\in\mathcal{X}_a$,$F\in\mathcal{C}\big(\mathbb{P}_{m_0}(M)\big)$, 我们有

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^1\langle D_sF(\gamma),\dot{Z}(\gamma,s,\rangle_{\gamma(s)}de\Big)=\mathbb{E}\big(F\delta(Z)\big)\ , \tag{3.1}$$

其中

$$\delta(Z)\circ I=\int_0^1\langle\dot{\tilde{z}}_0(w,s),dw(s)\rangle\ . \tag{3.2}$$

证明 先假定 Z 满足定理 2.2 的有界条件, 由 Girsanov 定理,

$$\mathbb{E}\big(F(\sigma_t)\rho_t\big)=\mathbb{E}(F),$$

即有

$$\mathbb{E}\big(F\circ I(\varphi^z_t)\tilde{\rho}_t\big)=\mathbb{E}(F)\ . \tag{3.3}$$

我们先证

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tilde{\rho}-1}{t}=-\int_0^1\langle\dot{\tilde{z}}(w,s),dw(s)\rangle\quad 在L^p中成立. \tag{3.4}$$

令

$$M_t = -\int_0^t \langle e^{-tq(w,s)}\dot{z}(w,s)dw(s)\rangle,\ \varphi(t) = -M_t - \frac{t}{2}\int_0^1 |\dot{z}(w,s)|^2 ds,$$

则 $\tilde{\rho}_t = e^{t\varphi(t)}$. 由于

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{E}\Big[\,|\,\varphi(t) + \int_0^1 \langle \dot{z}(w,s), dw(s)\rangle|^p\Big] = 0,\ \forall p > 1,$$

为证 (3.4), 只需证

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{E}\Big[\,|\,\frac{\tilde{\rho}_t - 1}{t} - \varphi(t)\,|^p\,\Big] = 0. \tag{3.5}$$

下面证明 (3.5). 由级数展开知

$$|\,\frac{\tilde{\rho}_t - 1}{t} - \varphi(t)\,| \le t|\varphi(t)|^2 e^{|\varphi(t)|},\ 0 \le t \le 1. \tag{3.6}$$

而 $\forall p > 1, 0 \le t \le 1$,

$$e^{p|\varphi(t)|} \le e^{p|M_t|}e^{pc} \le \big(e^{pM_t} + e^{-pM_t}\big)e^{pc},$$

$$e^{\pm pM_t} \le \exp\Big\{\pm pM_t - \frac{1}{2}p^2\int_0^1 |e^{-tq(w,s)}\dot{z}(w,s)|^2 ds\Big\}e^{\frac{p^2 c}{2}},$$

故 $\forall p > 1$,

$$\mathbb{E}[e^{p|\varphi(t)|}] \le 2e^{pc + \frac{p^2}{2}c}.$$

由此易知: $\forall p > 1$,

$$\sup_{0\le t\le 1} \mathbb{E}\big[\,|\,\varphi(t)\,|^{2p}\, e^{p|\varphi(t)|}\big] < \infty.$$

因此, 由 (3.6) 推得 (3.5) 成立, 即 (3.4) 得证. 另一方面, 由 φ_t^z 的构造, 若记

$$\beta(t,\tau) = \left\langle \theta, \frac{d}{dt}r(\varphi_t^z,\tau)\right\rangle,$$

$$\rho(t,\tau) = \left\langle \omega, \frac{d}{dt}r(\varphi_t^z,\tau)\right\rangle,$$

则 $\mathbb{E}(\sup_{0\le t,\tau\le 1}|\beta(t,\tau)|^p) < +\infty$.(见 [FM,p.258].) 我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(\sigma_t)-F(\gamma)}{t}\right|^p &= \left|\frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{ds}F(\sigma_s)ds\right|^p \\ &\le \frac{1}{t}\int_0^t \left|\frac{d}{ds}F(\sigma_s)ds\right|^p ds \\ &\le \sup_{0\le s\le 1}\left|\frac{d}{ds}F(\sigma_s)\right|^p .\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F\circ I(\varphi_s^z) &= \sum_{i=1}^{h}\langle\nabla_i F(\sigma_s), \frac{d}{ds}\sigma_s\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k}\langle\nabla_i F(\sigma_s), d\pi\big(r(\varphi_s^z,\tau_i)\big)\frac{d}{ds}r(\varphi_s^z,\tau_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k}\langle\nabla_i F(\sigma_s), r(\varphi_s^z,\tau_i)\beta(s,\tau_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k}\langle r(\varphi_s^z,\tau_i)^{-1}\nabla_i F(\sigma_s), \beta(s,\tau_i)\rangle ,\end{aligned}$$

所以

$$\left|\frac{d}{ds}F\circ I(\varphi_s^z)\right|^p \le C_{p,k}\sup_{0\le s,\tau\le 1}|\,\beta(s,\tau)\,|^p .$$

由此可见，在 L^p 中有

$$D_Z F(\gamma) = \lim_{t\to 0}\frac{F(\sigma_t)-F(\gamma)}{t}.$$

在 (3.3) 式两边对 t 求导，并令 $t=0$, 则得

$$\mathbb{E}\big(D_Z F(\gamma) - F\delta(z)\big) = 0 ,$$

即

$$\mathbb{E}(D_Z F) = \mathbb{E}\big(F\delta(Z)\big) ,$$

或

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^1 \langle D_\tau F, \dot{Z}(\gamma,\tau)\rangle d\tau\Big) = \mathbb{E}\big(F\delta(Z)\big) .$$

显然，上式两端依范数 $\|Z\|_2^2 = \mathbb{E}(\langle Z, Z\rangle_\gamma)$ 关于 Z 是连续的. 对任意 $Z \in \mathcal{X}_a$, 我们取

$$Z_n(\gamma,\tau) = t^{\gamma}_{\tau\leftarrow 0}\int_0^\tau \dot{Z}_0(\gamma,s) I_{(|\dot{z}_0(\gamma,s)|\le n)} ds,$$

则 $Z_n \in \mathcal{X}_a$ 且 $\lim_{n\to+\infty}\|Z_n - Z\|_2 = 0$. 于是在 (3,1) 式中将 Z 换成 Z_n, 并在两边取极限，则证得一般情形. ∎

在实际运算时，我们所遇到的函数常常不是柱函数. 如果总采用柱函数的逼近方法，往往很麻烦. 所以有必要对一族可测函数定义方向导数.

定义 3.3 给定 $F : \mathbb{P}_{m_0}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ 可测， $h \in \mathbb{H}, F \in L^p\big(\mathbb{P}_{m_0}(M),\nu\big)$. 我们称 F 沿 h 方向是强可导的, 如果对任意 $1 < p' < p$, 下述极限在 $L^{p'}$ 中存在:

$$D_h F(\gamma) = \lim_{t\to 0}\frac{F(\sigma_t) - F(\gamma)}{t}.$$

由上面证明可知,

$$\mathbb{E}(D_h F) = \mathbb{E}\big(F\delta(z_h)\big) .$$

§ 4. Ocône 表达公式

令

$$L^2(\mathcal{X}) = \Big\{u(\gamma,\tau) \in T_{\gamma(\tau)}M \, : \, \mathbb{E}\int_0^1 |u(\gamma,\tau)|^2 d\tau < +\infty\Big\},$$

则易见 $L^2(\mathcal{X})$ 是一个 Hilbert 空间. 考虑映射 $\mathcal{H}: L^2(\mathcal{X}) \longrightarrow L^2(\mathcal{X})$:

$$\mathcal{H}(u)(\gamma,\tau) = u(\gamma,\tau) + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_{\gamma(\tau)}\int_0^\tau t^\gamma_{\tau\leftarrow s}u(\gamma,s)ds \,.$$

命题 4.1 (i) $\mathcal{H}$ 为 $L^2(\mathcal{X})$ 中线性同胚映射;

(ii) $L^2(\mathcal{X})$ 的适应子空间 $L^2_a(\mathcal{X})$ 在映射 $\mathcal{H}$ 作用下不变, 即 $\mathcal{H}\big(L^2_a(\mathcal{X})\big) \subset L^2_a(\mathcal{X})$.

证明 若 u 是适应的, 由 $\mathcal{H}$ 的定义易见 $\mathcal{H}(a)$ 也是适应的. 现在只需证明 $\mathcal{H}$ 是有界算子, 其逆也是有界算子. 由于

$$\sup_{m\in M}\|\mathrm{Ric}_M\|_{\mathrm{End}(T_mM)} \le c < +\infty,$$

于是

$$|\,\mathrm{Ric}_{\gamma(\tau)}\int_0^\tau t^\gamma_{\tau\leftarrow s}u(\gamma,s)ds\,|^2 \le c^2\int_0^1 |\,u(\gamma,s)\,|^2\,ds\,.$$

由此可见 $\mathcal{H}$ 是有界算子. 现在考虑预解式,

$$\begin{aligned}\frac{dQ_{\tau,s}}{d\tau} &= -\frac{1}{2}J\big(r(\tau)\big)Q_{\tau,s}, \qquad s<\tau,\\ Q_{s,s} &= Id_{\mathbb{R}^d}\,.\end{aligned}$$

记 $Q_{\tau\leftarrow s}(\gamma) = r_w(\tau)\circ Q_{\tau,s}\circ r_w^{-1}(s)$, 定义

$$\tilde{u}(\gamma,\tau) = u(\gamma,\tau) - \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_{\gamma(\tau)}\int_0^\tau Q_{\tau\leftarrow s}u(\gamma,s)ds\,.$$

则 $u\longmapsto\tilde{u}$ 是 $\mathcal{H}$ 的逆映射. 此外, 由于

$$\sum_{\tau,s\in[0,1]^2}\|Q_{\tau,s}\| \le c < +\infty\,,$$

易见

$$\mathbb{E}\int_0^1 |\,\tilde{u}(\gamma,\tau)\,|^2\,d\tau \le c_1\mathbb{E}\Big(\int_0^1 |\,u(\gamma,\tau)\,|^2\,d\tau\Big)\,,$$

即 $\mathcal{H}^{-1}$ 也是有界算子. ∎

在介绍 Ocône 公式之前，我们先定义适应过程的随机积分. 令 $u \in \mathrm{L}_a^2(\mathcal{X})$, 记

$$\int_0^1 \langle u(\gamma,\tau), d\gamma(\tau)\rangle = \int_0^1 \langle u_0(w,\tau), dw(\tau)\rangle,$$

这里 $u_0(w,\tau) = t_{0\leftarrow\tau}^{\gamma} u(\gamma,\tau)$.

引理 4.2 记 $\mathcal{H}^*$ 为 $\mathcal{H}$ 在 $L^2(\mathcal{X})$ 中的伴随算子，则 $\mathcal{H}^*$ 也是线性同胚.

证明 我们采用泛函分析中的一般方法，而不求助于 $\mathcal{H}^*$ 的明确表达式. 由于 $L^2(\mathcal{X})$ 是 Hilbert 空间，为简单起见，记 $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ 为其内积. 给定 $u_n \in L^2(\mathcal{X})$, 使得在 $L^2(\mathcal{X})$ 中有 $u_n \to u$, $\mathcal{H}^* u_n \to v$. 任取 $w \in L^2(\mathcal{X})$, 则

$$\begin{aligned}\langle\langle v, w\rangle\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\langle\langle \mathcal{H}^* u_n, w\rangle\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle\langle u_n, \mathcal{H}(w)\rangle\rangle \\ &= \langle\langle u, \mathcal{H}(w)\rangle\rangle = \langle\langle \mathcal{H}^* u, w\rangle\rangle .\end{aligned}$$

于是 $v = \mathcal{H}^* u$. 由闭图象定理知 $\mathcal{H}^*$ 是有界的，同样，$(\mathcal{H}^{-1})^*$ 也是有界的.

设 $v \in L^2(\mathcal{X})$, 令 $u = (\mathcal{H}^{-1})^* v$, 则 $\forall w \in L^2(\mathcal{X})$ 有

$$\langle \mathcal{H}w, u\rangle = \langle \mathcal{H}w, (\mathcal{H}^{-1})^* v\rangle = \langle \mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}w, v\rangle = \langle w, v\rangle.$$

于是有 $\mathcal{H}^* u = v$, 即 $(\mathcal{H}^*)^{-1}$ 存在，且 $(\mathcal{H}^*)^{-1} = (\mathcal{H}^{-1})^*$. ∎

定理 4.3 若记 $\mathcal{N}_\tau = \sigma\{\gamma(s),\, s \le \tau\}$ 为 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上自然的 σ-代数流，则对任意 $F \in C(\mathbb{P}_{m_0}(M))$,

$$F = \mathbb{E}(F) + \int_0^1 \langle (\mathcal{H}^*)^{-1} \mathbb{E}^{\mathcal{N}_\tau}(D_\tau F), d\gamma(\tau)\rangle . \tag{4.1}$$

证明 由 Itô 表达公式，存在 $\mathbb{R}^d$ 上的适应随机过程 $a(w,\tau)$, 满足 $\mathbb{E}\int_0^1 |a(w,\tau)|^2 d\tau < +\infty$, 使得

$$F \circ I = \mathbb{E}(F) + \int_0^1 \langle a(w,\tau), dw(\tau)\rangle .$$

令 $v(\gamma,\tau) = r_w(\tau)a(w,\tau)$. 显然 $v \in L_a^2(\mathcal{X})$. 由引理 4.2, 存在 $u \in L_a^2(\mathcal{X})$ 使得 $v = \mathcal{H}(u)$. 于是

$$F = \mathbb{E}(F) + \int_0^1 \langle \mathcal{H}(u), d\gamma(\tau) \rangle \, . \tag{4.2}$$

另一方面, $\forall Z \in \mathcal{X}_a$, 由分部积分公式得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\int_0^1 \langle D_\tau F, \dot{Z}(\gamma,\tau) \rangle d\tau \Big) &= \mathbb{E}\Big(F \int_0^1 \langle \dot{Z}(\gamma,\tau), d\gamma(\tau) \rangle \Big) \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^1 \langle \mathcal{H}(u), d\gamma(\tau) \rangle \Big) \Big(\int_0^1 \langle \dot{Z}(\gamma,\tau), d\gamma(\tau) \rangle \Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_0^1 \langle \mathcal{H}(u), \dot{Z}(\gamma,\tau) \rangle d\tau \Big] \\
&= \langle\langle \mathcal{H}(u), \mathcal{H}(\dot{Z}) \rangle\rangle \\
&= \langle\langle \mathcal{H}^* \mathcal{H}(u), \dot{Z} \rangle\rangle \, .
\end{aligned}$$

由于 $\{\dot{Z}(\gamma,\tau), Z \in \mathcal{X}_a\}$ 生成 $\mathcal{N}_\tau$, 所以

$$\mathcal{H}^* \mathcal{H}(u) = \mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}(D_t F) \, ,$$

即有

$$u = \mathcal{H}^{-1} \mathcal{H}^{*-1} \mathbb{E}^{\mathcal{N}_t}(D_t F) \, .$$

再将 u 代入 (4.2) 式, 则得到欲证结果. ∎

推论 4.4 记 $c = \|(\mathcal{H}^*)^{-1}\|_{\text{End}}$, 则

$$\mathbb{E}\Big(| F - \mathbb{E}(F) |^2 \Big) \le c^2 \mathbb{E}\Big(\int_0^1 | D_\tau F |^2 \, d\tau \Big) \, .$$

证明 只需应用 (4.1) 及 Itô 随机积分的能量等式. ∎

§ 5. $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上的 O.U. 算子

考虑 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上的 Dirichlet 型：

$$\mathcal{E}(F,G)=\mathbb{E}\Big(\int_0^1\langle D_tF,D_tG\rangle dt\Big),\ \forall F,G\in\mathcal{C}\big(\mathbb{P}_{m_0}(M)\big)\ . \tag{5.1}$$

命题 5.1 $\big(\mathcal{E},\mathcal{C}\big(\mathbb{P}_{m_0}(M)\big)\big)$ 是可闭的.

证明 任取 $F_n\in\mathcal{C}\big(\mathbb{P}_{m_0}(M)\big)$ 使得 $\|F_n\|_{L^2}\to 0$. 现在只需证明对任意的 $G\in\mathcal{C}\big(\mathbb{P}_{m_0}(M)\big)$, $\lim_{n\to+\infty}\mathcal{E}(F_n,G)=0$. 若 G 具有如下表达式：

$$G(\gamma)=g\big(\gamma(\tau_1),\cdots,(\gamma(\tau_k)\big),$$

则

$$\big(D_\tau G\big)(\gamma)=\sum_{i=1}^k\big(t^\gamma_{\tau\leftarrow\tau_i}\nabla_i g(\gamma)\big)I_{(\tau<\tau_i)}\ .$$

记 $\{e_1,\cdots,e_d\}$ 为 $T_{m_0}M$ 中的规范基底，于是

$$t^\gamma_{0\leftarrow\tau_i}\big(\nabla_i g(\gamma)\big)=\sum_{j=1}^d g_{ij}(\gamma)e_j\ .$$

令 $u_{ij}(\gamma,\tau)=t^\gamma_{\tau\leftarrow 0}\big(I_{(\tau<\tau_i)}e_j\big)$, 则

$$\big(D_\tau G\big)(\gamma)=\sum_{i,j}g_{ij}(\gamma)u_{ij}(\gamma,\tau)\ .$$

令 $h_{ij}\in\mathbb{H}$ 使得 $\dot{h}_{ij}(\tau)=I_{(\tau<\tau_i)}e_j$. 从 $g_{ij}(\gamma)$ 的如下表达式

$$g_{ij}(\gamma)=\langle\nabla_i g(\gamma),r_w(\tau_i)r_0^{-1}e_j\rangle$$

可知， g_{ij} 沿 $h\in\mathbb{H}$ 是强可导的. 使用分部积分公式得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(F_n,G)&=\sum_{i,j}\mathbb{E}\Big(g_{ij}\int_0^1\langle D_\tau F_n,u_{ij}(\gamma,\tau)\rangle d\tau\Big)\\&=\sum_{i,j}\mathbb{E}\big(g_{ij}D_{h_{ij}}F_n\big)\\&=\sum_{i,j}\mathbb{E}\big(\big(-D_{h_{ij}}g_{ij}+\delta(h_{ij})F_n\big)\longrightarrow 0\qquad(n\to+\infty).\end{aligned}$$

根据 Dirichlet 型理论 (参阅 [MR]), $\mathcal{E}$ 有一个 Dirichlet 型的极小延拓 (仍记 $\mathcal{E}$), 并存在一自伴算子 $\mathcal{L}$ 使得 $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{E})$, 且

$$\int_{\mathbb{P}_{m_0}(M)} \mathcal{L}FG d\nu = \int_{\mathbb{P}_{m_0}(M)} F\mathcal{L}G d\nu = \mathcal{E}(F,G)\ ,\ \forall F,G \in D_m(\mathcal{L})\ . \tag{5.2}$$

定理 5.2 记

$$\Lambda = \{\lambda > 0, \exists F \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}), F \neq 0, \text{使得} \mathcal{L}F = \lambda F\}\ ,$$

则 $\inf\{\lambda : \lambda \in \Lambda\} \geq c^{-2} > 0$(见推论 4.4 中 c 的定义).

证明 取 $\lambda \in \Lambda$, F 为对应于 λ 的特征函数. 由 (5.2),

$$\lambda \int_{\mathbb{P}_{m_0}(M)} F d\nu = \int_{\mathbb{P}_{m_0}(M)} \mathcal{L}F d\nu = \mathcal{E}(F,1) = 0\ ,$$

即有 $\mathbb{E}(F) = 0$. 应用推论 4.4,

$$\mathbb{E}(F^2) \leq c^2\mathcal{E}(E,F) = c^2\mathbb{E}(\mathcal{L}F \cdot F) = c^2\lambda\mathbb{E}(F^2).$$

由此得 $\lambda \geq c^{-2}$. ∎

定理 5.3 设 $F \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$, 则 $\mathcal{L}F = 0$, 当且仅当 F 为常值函数.

证明 应用推论 4.4,

$$\mathbb{E}(|F - \mathbb{E}(F)|^2) \leq c^2\mathcal{E}(F,F) = c^2\mathbb{E}(\mathcal{L}F\, F) = 0,$$

于是 $F = \mathbb{E}(F)$, ν-a.e.. ∎

§ 6. 评论

这一节的主要目的是介绍与前五节内容有关的最近进展. 我们将逐节进行评述.

§1. 关于 Itô 映射逆的存在性涉及到怎样在流形上定义随机积分. 下面的定义不涉及到辅助空间 $\mathbb{R}^d$, 而是由流形的内在元素

所决定. 给定 $m \in M$, 记 $\exp_m : T_mM \longrightarrow M$ 为在 m 的指数映照. $\exp_m$ 定义了一个局部的微分同胚. 现在取区间 $[0,1]$ 的分划 $\Gamma = \{\tau_1, \cdots, \tau_n\}$, 令

$$S(\Gamma) = \sum_{i=1}^{k-1} \langle \dot{Z}(\gamma, \tau_i), \exp^{-1}_{\gamma(\tau_i)}(\gamma(\tau_{i+1}))\rangle \; , ,$$

若记 $\delta(\Gamma) = \sup_i |\tau_{i+1} - \tau_i|$, 则当 $Z \in \mathcal{X}_a$ 时, $\lim_{\delta(\Gamma)\to 0} S(\Gamma)$ 存在 (见 [Da],[FM]). 利用上述定义可给出 J 的内在表达式 (见 [Fa]).

§**2.** 这里定义的切空间与微分几何中的切空间有许多不同点. 以 Wiener 空间为例, $\mathbb{H}$ 是 W 的切空间, 而 $\mu(\mathbb{H}) = 0$. 另一方面, 任取 $h, k \in \mathbb{H}$ 为 $\mathbb{P}_{m_0}(M)_Z$ 上的常值向量场, 如果按下述方式定义 $[h,k]$:

$$D_{[h,k]}F = D_hD_kF - D_kD_hF \; , \forall F \in \mathcal{C}(\mathbb{P}_{m_0}(M)) \; ,$$

则出人意料的是: $[h,k] \notin \mathcal{X}$(见 [CM1]). 于是切空间的概念需要适当加以扩充. B. Driver 引进了适应的向量场概念, 计算了它们之间的 Lie 括号, 并证明了在一定的条件下它们的稳定性 (见 [Dr1,2]). 另一方面 Cruzeiro 和 Malliavin 引进了切过程概念 (见 [CM2]). Wiener 空间上的半鞅

$$d\xi(\tau) = Q(\lambda, \tau)dx(\tau) + h(x,\tau)d\tau$$

称为切过程, 如果它满足如下条件: (i) $q(x,\tau)$ 为 so(d)- 适应随机过程; (ii) $h(x,\tau)$ 为 $\mathbb{R}^d$- 适应过程, 使得 $\mathbb{E}\int_0^1 |h(x,\tau)|^2 < +\infty$. 对切过程 ξ, 可以定义沿 ξ 的方向导数 $D_\xi F$, 并且有

$$\mathbb{E}(D_\xi F) = \mathbb{E}\big(F \int_0^1 \langle h(x,\tau), dx(\tau)\rangle\big) \; .$$

给定 $h \in \mathbb{H}$, 是否存在 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上的拟不变流 σ_t 使得 $\frac{d\sigma_t}{dt}(\tau) = Z_h(\sigma_t, \tau)$? B. Driver 首先证明了它的存在性 (见 [Dr1]). 一年以

后，P. Hsu 将 Driver 证明中要求的 h 的 Lipschitz 条件放松到它的自然空间 $\mathbb{H}$(见 [Hs1]). 关于这一结果，另外还有 P. Hsu 的 Euler 逼近证明方法 ([Hs2]), Norris 的两参数技巧 ([No]), 以及 Enchev 和 Stroock 的最新证明.

§3. 分部积分公式中对向量要求的不同存在着不同的层次. 当我们去掉适应条件时，分部积分公式是否还成立？在 [Fa] 中作者给出了适当的 Sobolev 条件，以保证散度的存在性. 关于散度的能量等式实际上是一种 Weitzenböck 公式，这涉及到如何在 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 中引进连络. 有关内容请参阅 [CM] 和 [CF].

§4. 许多学者试图从建立鞅的表达式出发证明分部积分公式 (见 [EL], [AM] 和 [EK]).

§5. 在 [DR] 中 Driver 和 Röckner 证明了在 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上存在一随机过程，它对应于 Dirichlet 型 $\mathcal{E}$. Norris 用两参数随机计算构造了 $\mathbb{P}_{m_0}((M)$ 上的一些常见过程 (见 [No]), Kazumi 采用投影技巧较为清楚地构造出 $\mathbb{P}_{m_0}(M)$ 上的 O.U. 过程. 关于 O.U. 算子的谱的性质，请参阅 [HS 3],[AE] 和 [AI].

参 考 文 献

[AE] S. Aida and D. Elworthy, Differential calculus on path and loop spaces, 1. logarithmic Sobolev inequalities, C. R. Acad. Sci. Paris, 321(1995), 97–102.

[Ai] S. Aida, Gradient estimates of harmonic functions and the asymptotic of spectral gaps on path space, 1995(preprint).

[AM] H. Airault and P. Malliavin, Semi-martingales with values in a Euclidean vector bundle and Ocône's formula on a Riemennian mamifold, in Proceeding of Symp. in Pure Math., M. C. Cranston and M. A. Pinšky(ed.), 57(1995).

[BL] D. Bakry and M. Ledoux, Lévy-Gromov isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator, 1995(preprint).

[Bi] J. M. Bismut, Large Diviations and Mallianvin Calculus, Birkhaü- ser,Boston, Basel,1984.

[CC] 陈省身、陈维桓， 微分几何讲义，北京大学出版社， 1981.

[CF] A. B. Cruzeiro and S. Fang, An L^2estimate for Riemannian anticipative stochastic integrals (to appear in J. Funct. Anal.).

[CM1] A. B. Cruzeiro and P.Malliavin, Repere mobile et géométrie riemannienne, C. R. Acad. Sci. Paris, 319(1994), 859−864.

[CM2] A. B. Cruzeiro and P. Malliavin, Courbure de l'espace de probabilités d'un mouvement brownien riemannien, C. R. Acad. Sci. Paris, 320(1995), 603−607.

[Dr1] B. Driver, A Cameron-Martin type quasi-invariance theorem for Brownian motion on a compact manifold, J. Funct. Anal., 110(1992), 272−376.

[Dr2] B. Driver, The Lie Bracket of Adapted Vector Fields on Wiener Space, 1995(preprint).

[Dr3] B. Driver, A Prime on Riemanian Geometry and Stochestic Analysis on Path Spaces, Lecture Notes(Zürich Univ.), 1995.

[DR] B. Driver and M. Röckner, Construction of diffusions on path and loop spaces of compact Riemanian manifolds, C. R. Acad. Sci. Paris, 315(1992), 603−608.

[Da] R. W. R. Darling, Approximating Itô integrals of differential forms and geodesic deviation, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 65(1984), 563−572.

[EK] R. J. Elliott and M. Kohlmann, Integration by parts, Annals of Probability, 17(1989), 194−207.

[EL] D. Elworthy and X. Li, Formulae for the derivatives of heat semigroups, J. Funct. Anal., 125(1994).

[E] M. Emery, Stochastic Calculus in Manifolds, Springer-Verlag, 1989.

[Fa] S. Fang, Stochastic Anticipative Integrals in a Riemannian Manifold, J. Funct. Anal., 131(1995), 228−253.

[FM] S. Fang and P. Malliavin, Stochastic Analysis on the Path Space of a Riemannian Manifold, J. Funct. Anal., 118(1993), 249−274.

[He] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press, 1978.

[Hs1] E. P. Hsu, Quasi-Invariance of the Wiener Measure on the Path Space Over a Compact Riemannian Manifold, J. Funct. Anal., 134(1995).

[Hs2] E. P. Hsu, Flows and quasi-invariance of the Wiener measure on path space, in: Proceedings of Symp. in Pure Math., M. C. Cranston and M. A. Pinsky(ed.), 57(1995), 265−279.

[Hs3] E. P. Hsu, Logarithmic Sobolev inequalities in path spaces, C. R. Acad. Sci. Paris, 320(1995), 1209−1012.

[H] 黄志远，随机分析学基础，武汉大学出版社， 1988.

[IW] N. Ikeda and S. Watanabe, Stothastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland Publ. Company, 1981.

[KN1] S. Kobayshi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Vol.I, Interscience Publishers, 1963.

[KN2] S. Kobayshi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Vol.II, Interscience Publishers, 1969.

[M] P. Malliavin, Géométrie Différentielle Stochastique, les Presses de l'Université de Montréal, 1978.

[Mc] H. P. Mc Kean, Stochastic Integrals, Academic Press, 1969.

[MR] Z. M. Ma and M. Röckner, An introduction to the theory of(non-symmetric) Dirichlet forms, Springer-Verlag,1992.

[Mo] J. Moulinier, Théorème limit pour les équations differentielles Stochastiques, Bull. Sci. Math. 2ème Série, 112(1988), 185−209.

[No] J. R. Norris, Twisted sheets, J. Funct. Anal., 132(1995), 273−334.

[R] J. G. Ren, Analyse quasi-sûre des equations différentielles stochastiques, Bull. Sci. Math., 2ème Série, 114(1988), 187−214.

[W] F. Warner, Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 1983.

第四篇 大偏差理论入门[1]

大偏差理论源于 Donsker 和 Varadhan 的奠基性工作 [DV,I-IV], 经八九十年代众多学者的开拓发展，现已形成概率论的一个重要分支. 因它在偏微分方程、马氏过程、动力系统及其随机扰动、统计力学的现代 Gibbs 场理论、统计等众多领域都有广泛的应用，甚至与它们有着深刻的联系，因此在国内外均得到越来越多的研究和注意，其发展方兴未艾.

1. 什么是大偏差

设 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0) \subset M_1(X)$, $M_1(X)$ 表示波兰空间 X 上的概率测度空间. 假定 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 弱收敛于 Dirac 测度 $\delta_p (p \in X)$. 那么

$$\mu_\epsilon(A) \to 0(当\epsilon \to 0时), 若 p \notin \overline{A}, \tag{0.1}$$

其中 A 是 Borel σ- 域 $\mathcal{B}(X)$ 中的任意元.

此时可将 A 理解为与极限点 p 的一个固定偏差区域，而 $\mu_\epsilon(A)$ 就表示发生这种偏差的概率. 怎样估计 $\mu_\epsilon(A)$ 趋于零的速度，是众多理论与实际问题需要解决的.

大偏差估计是指：对足够丰富的 $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu_\epsilon(A) = \exp\{-I(A)/\lambda(\epsilon) + o(1/\lambda(\epsilon))\}, \tag{0.2}$$

---

[1] 作者用本篇材料分别在武汉大学数学系 (1994) 和襄樊师专全国首届数学研究生暑期学校 (1995) 讲过课. 作者感谢听课的同事和研究生们指出和帮助修改了原稿中不少错漏之处，其中特别要感谢高付清教授和胡亦钧副教授.

其中 $\lambda:(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$, 满足 $\lim_{\epsilon\to 0}=0$,$I(A)$ 是依赖于 A 的非负常数. 当 $I(A)>0$, (0.2) 即为指数型收敛速度.

大偏差理论中的大偏差原理 (简记为 LDP), 是 (0.2) 的如下精确表述: 存在下紧函数 $I:X\longrightarrow[0,+\infty]$, 使得对于任意 $A\in\mathcal{B}(X)$, 若 $\inf_{A^\circ}I=\inf_{\overline{A}}I$, 有

$$\mu_\epsilon(A)=\exp\{-\inf_A I/\lambda(\epsilon)+o(1/\lambda(\epsilon)\}. \tag{0.3}$$

它比 (0.2) 多了一函数 I. 我们将称 I 为速率函数, $\lambda(\epsilon)$ 为速度.

在通常的极限定理 (如大数定律、中心极限定理、重对数律等) 中是没有速率函数 I 的. 而我们马上会看到, 在几个重要的 LDP 中, 速率函数 I 分别为物理中的动能、作用能或熵. 所以说 I 赋予了 LDP 比通常极限定理更为丰富的内涵.

2. 大偏差理论的来源和几个里程碑结果

2.1 统计

例 1 设 $(\xi_n,n\in\mathbb{N})$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上定义的一列独立同分布、取值于 $\mathbb{R}^d$ 的随机变量. 考虑经验均值

$$\frac{S_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\ ,\ n\geq 1.$$

令 m 为真实均值 $\mathbb{E}\xi_0$. 弱大数定律给出

$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n}-m|>\delta)\longrightarrow 0\ (n\to+\infty). \tag{0.4}$$

怎样精确估计 (0.4) 左端概率是统计中一个基本问题, 如众所周知的中心极限定理、重对数律、 Berry-Essen 定理、 Cramér 定理等都是为此服务的. 下面介绍

Cramér 定理([Cr]) 假设

$$\mathbb{E}\exp\{\lambda\mid\xi_0\mid\}<+\infty\ ,\ \forall\lambda>0. \tag{0.5}$$

定义 ξ_0 的分布 $\mathcal{L}(\xi_0)=\alpha$ 的 对数 -Laplace 变换:

$$
\begin{aligned}
\Lambda(y) &= \log \mathbb{E} \exp\langle \xi_0, y\rangle \\
&= \log \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle x,y\rangle}\alpha(dx), \forall y \in \mathbb{R}^d,
\end{aligned} \tag{0.6a}
$$

以及它的 Legendre 变换:

$$
\Lambda^*(x) = \sup(\langle x, y\rangle - \Lambda(y) \mid y \in \mathbb{R}^d), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{0.6b}
$$

则

(a) $\Lambda^* : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,+\infty]$ 下紧, $\Lambda^*(x)=0 \Leftrightarrow x=m$;

(b) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, 若 $\inf_{A^\circ}\Lambda^* = \inf_{\overline{A}}\Lambda^*$, 有

$$
\mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n}\in A\Big) = \exp\{-n\inf_A \Lambda^* + o(n)\}. \tag{0.7}
$$

令 $\epsilon(n)=\dfrac{1}{n}, \mu_{\epsilon(n)}=\mathbb{P}(\dfrac{S_n}{n}\in\cdot)$, 上述定理正是说 $(\mu_{\epsilon(n)}, n\to+\infty)$ 满足速率函数为 Λ^* 、速度为 $\epsilon(n)$ 的 LDP. 这个定理揭示了对数 Laplace 变换与 Legendre 变换在大偏差理论中的重要性. 其证明思想被发展成为现代的所谓 Cramér 方法.

附带介绍 大偏差 名称的来源:

— 当 δ 在 (0.4) 中固定时 $(\delta=t)$, $|\dfrac{S_n}{n}-m|>t$ 称为大偏差.

— 当 $\delta=t/\sqrt{n}$, (0.4) 成为中心极限定理的形式.

— 当 $\delta=\dfrac{t\lambda(n)}{\sqrt{n}}$, 其中 $\lambda(n)\to+\infty$, $\dfrac{\lambda(n)}{\sqrt{n}}\to 0$, 相应的偏差介于大偏差与中心极限定理的偏差形式之间, 在统计学文献中称为中偏差.

2.2 遍历现象

例 2 设 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的一列独立同分布、取值于波兰 (Polish) 空间 E 中的随机元. 记 $\alpha=\mathcal{L}(\xi_0)$ 为它们共

同的分布．经验分布为

$$L_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{\xi_k}\ ,\ n \geq 1.$$

赋予 E 上概率测度空间 $M_1(E)$ 以弱收敛拓扑“$\xrightarrow{w}$”以及相应的 Borel σ- 域 $\mathcal{B}(M_1(E))$，则 L_n 是取值于 $M_1(E)$ 中的随机元．据 Birkhoff 遍历定理，易证 $L_n \xrightarrow{w} \alpha$, a.s.．

估计 L_n 与 α 的偏差概率是非参数统计中和理解遍历现象时常常要用到的．下述定理是 Deuschel–Stroock 在 [DS] 的历史述评中称之为令（当时）人吃惊的结果：

Sanov 定理([Sa]) 定义相对熵

$$h(\beta;\alpha) = \begin{cases} \int_E \frac{d\beta}{d\alpha} d\alpha, & \text{若}\beta << \alpha, \\ +\infty, & \text{否则}, \end{cases} \tag{0.8}$$

则

(a) $h(\cdot\,;\alpha)$ 是 $(M_1(E) \xrightarrow{w})$ 上的下紧函数，且 $h(\beta;\alpha) = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha$.

(b) 对任意 $A \in \mathcal{B}(M_1(E))$，若 $\inf_{A^\circ} h(\cdot\,;\alpha) = \inf_{\overline{A}} h(\cdot\,;\alpha)$，有

$$\mathbb{P}(L_n \in A) = \exp\{-\inf_{\beta\in A} h(\beta;\alpha)n + o(n)\}. \tag{0.9}$$

注 熵是 Boltzman 在 19 世纪引入热力学的，是最重要的物理概念之一，也是动力系统理论中一个极为重要的不变量（归功于 Kolmogrov[Ko]）．据 Kolmogorov–Ornstein 定理，两个 Bernouilli 动力系统可测同胚，当且仅当熵相同．因此可以说 Sanov 定理揭示了独立同分布序列的本质．

2.3 数学物理

数学物理中的许多问题都归结为研究下述 Laplace 积分的渐近性质：

$$\int_X e^{F/\lambda(\epsilon)} d\mu_\epsilon. \tag{0.10}$$

Varadhan 发现

Laplace 原理([Va1]) 若 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 、速度为 $\lambda(\epsilon)$ 的 LDP, 则对 $F \in C_b(X)$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lambda(\epsilon) \log \int_X e^{F/\lambda(\epsilon)} d\mu_\epsilon = \sup_X (F - I). \tag{0.11}$$

试举两例说明 (0.10),(0.11) 的用途.

例 3 考虑 $\mathbb{R}^d$ 中的热传导方程 (设 $V \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$):

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \Delta u^\epsilon + (V/\epsilon) u^\epsilon \ , \ u^\epsilon(0, x) = 1 \tag{0.12}$$

(注: 它亦是虚时间Schrôdinger 方程, $\epsilon = \hbar$ 是 Planck 常数). 什么是 $u^\epsilon(1, x)$ 在 $\epsilon \to 0$ 时的渐近性质?

现将此问题化为 (0.10). 设 $(W_t)_{t \geq 0}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上、$\mathbb{R}^d$ 中从原点 0 出发的标准 Brown 运动 (即生成算子为 $\Delta/2$). 据 Feynman–Kac 公式, (0.12) 的解可表示为

$$u^\epsilon(1, x) = \mathbb{E} \exp\{\frac{1}{\epsilon} \int_0^1 V(x + \sqrt{\epsilon} W_s) ds\}. \tag{0.13}$$

记 $X = C([0,1]; \mathbb{R}^d)$; $\mu_\epsilon = \mathbb{P}(\sqrt{\epsilon} W_{[0,1]} \in \cdot)$, 即 $\sqrt{\epsilon} W_{[0,1]}$ 在 X 中的分布. 令

$$F(w) = \int_0^1 V\big(x + w(s)\big) ds \ , \ \forall w \in C([0,1]; \mathbb{R}^d),$$

则 (0.13) 变成 (0.10). 为回答上述问题, 我们陈述以下定理.

Schilder 定理([Sc]) 定义 $I : C([0,1], \mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, +\infty]$,

$$I(w) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \mid \dot{w}(s) \mid^2 ds, & \text{若} w(\cdot) \in L^2([0,1]; \mathbb{R}^d); \\ +\infty, & \text{否则}. \end{cases} \tag{0.14}$$

则 $(\mu_\epsilon = \mathbb{P}(\sqrt{\epsilon} W_{[0,1]} \in \cdot), \epsilon \to 0)$ 在 $C([0,1], \mathbb{R}^d)$ 上满足速率函数为 I 的大偏差原理 (LDP).

注 $H=\{w\mid I(w)<+\infty\}$ 是 Cameron-Martin 子空间， $I(w)$ 是质量为 1 的粒子沿轨道 w 运动的 动能.

据 Laplace 原理，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\log u^{\epsilon}(1,x)\\
&\quad=\sup\{\int_0^1 V(x+w(s))ds-I(s)\mid w\in X\} \qquad (0.15)\\
&\quad=-\inf\{A(w)\mid w\in X, I(w)<+\infty\},
\end{aligned}$$

其中 $A(w)=\int_0^1[\frac{1}{2}|\dot{w}(s)|^2-V(x+w(s))]ds$ 正是一个质量为 1 的粒子在有势能场 V 中沿轨道 w 运动的作用能.

回忆 (0.15) 中的下确界仅仅在 $w=\xi$ 是如下 Newton 方程解时达到

$$\xi(0)=x, \qquad \ddot{\xi}(t)=-\nabla V\big(\xi(t)\big). \tag{0.16}$$

例 4 考虑一个取值于波兰空间 E 的马氏过程

$$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),(X_t),(\mathbb{P}_x)_{x\in E}),$$

其转移概率算子半群 (P_t) 的生成算子为 $\mathcal{L}$. 它用来模拟一个在 E 中自由的热扩散过程.

现在假定有交互作用势 $V:E\to\mathbb{R}$, 它有界连续. 相应热扩散方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\big(\mathcal{L}+V(x)\big)u(t,x). \tag{0.17}$$

仍取初始条件为： $u(0,x)\equiv 1$.

一个极为自然的问题是：当 $t\to+\infty$ 时，热量分布 $u(t,x)$ 的极限状态是怎样的？仍据 Feynman-Kac 公式，有

$$u(t,x)=\mathbb{E}^x\exp\int_0^t V(X_s)ds. \tag{0.18}$$

记 $L_t = \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{X_s} ds$,$\epsilon = \frac{1}{t}$,$\mu_\epsilon = \mathbb{P}_x(L_t \in \cdot)$,$X = M_1(E)$,$F(\beta) = \int_E V d\beta$. 则 (0.18) 仍变成 (0.10):

$$u(t,x) = \int_X e^{F/\epsilon} d\mu_\epsilon .$$

所以上述问题变成 $(\mathbb{P}_x(L_t \in \cdot), t \to +\infty)$ 的大偏差问题. 它是由 Donsker 和 Varadhan 的系列奠基性工作 [DV,I—IV] 建立的. 他们工作中所引入的概念、思想和技巧一直在大偏差理论的研究中起着重要作用, 在最近十多年来得到了较大的发展.

本篇旨在于围绕一些具体数学物理、统计问题, 详细介绍大偏差理论的基本概念、思想和技巧. 全篇分四章. 第一章介绍大偏差理论的基本框架, 包括三个基本原理 (收缩原理、Laplace 原理、Gibbs 原理) 和三个基本方法: (1) 比较方法; (2) 指数胎紧和指数胎* 紧法; (3) 投影极限方法. 第二章系统介绍在局部凸向量空间上的 Cramér 方法, 它是大偏差理论中最为广泛和有力的工具之一. 其实质在于怎样通过 Cramér 泛函 Λ 和它的 Legendre 变换 Λ^* 得到大偏差估计. 本章需要较多凸分析方面的知识. 我们仅仅将一些必要的结果收进附录 A 中. 第三章我们用 Cramér 方法证明本引言中提到的三个基础结果和它们的推广, 并用熵、熵投影将它们联系起来. 作为应用, 我们还将介绍 Ventcel-Freidlin 关于随机扰动的基本定理.

作者期望本篇能吸引读者进入大偏差理论的前沿课题, 如: 马氏过程、动力系统、平稳过程的大偏差及中偏差, 及其在热力学极限、流体动力学极限、线性及非线性偏微分方程等领域的应用.

第一章 大偏差理论框架

本章详细介绍大偏差理论的基本概念、基础原理和基本方法，共分五节：§1 引入基本概念；§2 介绍三个基础原理：收缩原理、Laplace 原理、Gibbs 原理；§3 引入从弱型大偏差原理到 LDP 的基本工具：指数胎紧 (与胎 紧*) 性；§4 介绍极为常用的比较方法；最后在 §5 中讨论乘积空间和投影极限空间上的大偏差.

§1. 基本概念

设 X 是一非空正则 Hausdorff 拓扑空间 (正则是指：X 中的每一点 x 都有一个由 闭集 组成的邻域基). 以 $\mathcal{B}(X)$ 记由所有开集生成的 Borel σ- 域. 但由于我们不再假设 X 是波兰空间 (即可度量化、完备、可分空间),$\mathcal{B}(X)$ 往往大得难以在 $(X,\mathcal{B}(X))$ 上定义测度. 例如对乘积空间 $\mathbb{R}^T$, 当 T 不可数时, 一个实值随机过程 $(x_t)_{t\in T}$ 的分布是 $(\mathbb{R}^T,\mathcal{B}(\mathbb{R})^T)$ 上的概率测度，但不是 $(\mathbb{R}^T,\mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ 上的测度. 为此，设 $\mathcal{A}$ 是 X 上一固定 σ- 域，它包含任意 $x\in X$ 的一个 开 邻域基和一个 闭 邻域基.

定义 1.1 $I: X\longrightarrow[0,+\infty]$ 称为速率函数，若它是下半连续的 (即：$\forall L\geq 0$, $[I\leq L]$ 是闭的). 称 I 是下紧的或好速率函数，若 $\forall L\geq 0,[I\leq L]$ 为紧集.

下紧函数具有良好的极限性质.

命题 1.2 (a) 若 $I: X\longrightarrow[0,+\infty]$ 下紧，则存在 $x\in X$, 使得

$$I(x)=\inf_X I\,.$$

(b) 设 $(A,\leq)$ 是偏序集，且 A 中任意有限子集都有上界. 设 $(I_a,a\in A)$ 是一族下紧速率函数，满足 $\forall a\leq b$, $I_a\leq I_b$. 则有

$$\sup_{a\in A}\inf_{x\in X}I_a(x)=\inf_{x\in X}\sup_{a\in A}I_a(x).$$

证明 (a) 若 $l \doteq \inf_X I = +\infty$, 则结论显然. 所以不妨设 $l < +\infty$. 此时 $K_n = [I \le l + \frac{1}{n}]$ 是一列空非单调下降紧集, 因此 $\cap_{n\ge 1} K_n \doteq K$ 非空. 而 $x \in K$ 就满足要求.

(b) 因 $\inf_X I_a \le \sup_{a\in A} I_a(x)$ 对任意 $x \in X$ 成立, 所以有 "$\le$". 为证 "$\ge$", 记 $l = \sup_{a\in A} \inf_X I_a$. 若 $l = +\infty$, 则 "$\ge$" 自动成立. 设 $l < +\infty$. 由 (a),$\forall a \in Z, [I_a \le l]$ 非空, 且对任意有限个 $a_1, \cdots, a_n \in A$, 可取 $b \ge a_1 \cdots, a_n$. 由单调性,

$$\bigcap_{k=1}^{n} [I_{a_k} \le l] \supset [I_b \le l] \text{非空}.$$

由有限覆盖定理 (变型) 知, $\bigcap_{a\in A} [I_a \le l]$ 非空. 取此集合中一点 x_0, 有

$$\inf_{x\in X} \sup_{x\in X} \le \sup_{a\in A} I_a(x_0) \le l. \qquad \blacksquare$$

现在给定 $(X, \mathcal{A})$ 上的一族概率测度 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$, I 是 X 上的速率函数. 引入

定义 1.3 (a) 称 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的大偏差下界 (lower large deviation, 简记为 LLD), 若对 X 的所有开集 $G \in \mathcal{A}$,

$$l(G) \doteq \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(G) \ge -\inf_G I. \tag{1.1}$$

(b) 称 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的大偏差上界 (upper large deviation, 简记为 ULD), 若 I 下紧, 且对 X 中所有闭集 $F \in \mathcal{A}$

$$u(F) \doteq \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(F) \le -\inf_F I. \tag{1.2}$$

(c) 称 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的大偏差原理 (large deviation principle, 简记为 LDP), 若 (a) 中的 LLD 和 (b) 中的 ULD 同时成立

再引入弱型大偏差:

定义 1.4 称 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的 弱* 型大偏差上界, 简记为 w*-ULD, 若对 X 的任何紧子集 K, $\forall \delta > 0$, 存在 $\mathcal{A}$- 可测的开集 $G^\delta \supset K$, 使得

$$u(G^\delta) \leq \begin{cases} -\inf_K I + \delta & \text{若} \inf_K I < +\infty, \\ -1/\delta & \text{若} \inf_K I = +\infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

而称 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 满足相应的 弱* 型大偏差原理, 简记为 w*-LDP, 若 LLD 和 w*-LDP 同时成立.

注 1.5 (i) 设 $\lambda : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ 满足 $\lim_\epsilon \lambda(\epsilon) = 0$. 重新定义 (1.1) 和 (1.2) 中的量如下:

$$\begin{pmatrix} l(A) \\ u(A) \end{pmatrix} := \lim_{\epsilon \to 0} \begin{pmatrix} \inf \\ \sup \end{pmatrix} \lambda(\epsilon) \log \mu_\epsilon(A).$$

这样就会得到所谓的速率函数为 I 、速度为 $\lambda(\epsilon)$ 的各种大偏差性质 (如引言中所介绍). 但因以上估计只与 $\lambda(\epsilon) \to 0$ 的速度有关, 可取 $\lambda(\epsilon)$ 严格增. 取 $\epsilon' = \lambda(\epsilon), \nu_{\epsilon'} = \mu_\epsilon$, 这样我们又回到了定义 1.3 、 1.4 中的框架.

(ii) 若对任意紧集 $K \subset X$,

$$u(K) \leq -\inf_K X. \tag{1.4}$$

则称 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的弱型大偏差上界, 简记为 w-ULD. 同样, 弱大偏差原理 (简记为 w-LDP) 指 LLD 与 w-ULD 同时成立. 显然 w*-ULD $\Rightarrow$ w-ULD.

通常及经典文献中, 一般只考虑 w-LDP 和 w-ULD(因表述简洁之故). 但以后会逐步看到, w*-ULD 有较多的好处.

(iii) 在经典文献中, 一般只考虑 X 是波兰空间且 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ 的情形. (为叙述简便?) 这在应用中是有局限性的: 非参数统计应用中出现的不可分 Banach 空间, 或者常常用到 $M_1(E)$ 中的 τ- 拓扑 (τ- 拓扑一般是不可度量化的) 等.

(iv) 正则 Hausdorff 拓扑空间等价于所谓 $T3$ 分离性质 (即对任一闭集和它之外的任一点，可用两个互不相交的开集分别包含它们), 它是极为广泛的. 例如, 所有可度量化 Hausdorff 空间是正则的; 所有拓扑向量空间是正则的.

命题 1.6 (a) LLD$\Leftrightarrow \forall x \in X$, 存在邻域基 $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{A}$, 使得 $\forall N \in \mathcal{N}(x), \quad l(N) \geq -I(x)$.

(b) w*-ULD$\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall \delta > 0$, 存在 x 的邻域 $N \in \mathcal{A}$, 使得 $u(N) \leq -a(I(x), \delta)$. 这里

$$a(t, \delta) = \begin{cases} t - \delta, & 若 t < +\infty, \\ 1/\delta, & 若 t = +\infty. \end{cases}$$

(c) w*-LDP 的速率函数唯一.

证明 (a) "$\Rightarrow$" 显然. 往证 "$\Leftarrow$". 设 $G \in \mathcal{A}$ 是开集, $x \in G$ 任意. 取 $N \in \mathcal{N}(x), N \subset G$, 有 $l(G) \geq l(N) \geq -I(x)$. 因 $x \in G$ 任意, 此即 (1.1).

(b) 取 $K = \{x\}$ 即得 "$\Rightarrow$". 往证 "$\Leftarrow$". 设 K 紧. 对任意 $\delta > 0$, 由条件知, 每一点 $x \in X$ 都有邻域 $N(x) \in \mathcal{A}$ 使得 $u(N(x)) \leq -a(I(x), \delta)$. 由有限覆盖定理, 存在有限多个 $\{N(x_i); i = 1, \cdots, N\}$ 覆盖 K, 即

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i) := G^\delta.$$

易知 (下面第二个等式见习题 1.9):

$$u(K) \leq u(G^\delta) = \max_{1 \leq i \leq n} u\big(N(x_i)\big) \leq -\min_{1 \leq i \leq n} a\big(I(x_i), \delta\big).$$

现在比较上式最后一项与 (1.3) 的右端. 若 $\inf_K I = +\infty$, 有

$$a\big(I(x_i), \delta\big) = a(+\infty, \delta) = \frac{1}{\delta},$$

上式给出 (1.3). 若 $\inf_K I < +\infty$, 只要 $1/\delta > \inf_K I$, 就有

$$a\big(I(x_i), \delta\big) \geq \inf_K I - \delta, \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

所以上式蕴含 (1.3) 式对所有充分小 δ 成立.

(c) 设 $I,\widehat{I}$ 是 w*-LDP 的两个速率函数. 由 X 的正则性和 $\widehat{I}$ 的下半连续性知, 对任意 $\delta > 0$, 存在闭邻域 $N(x) \in \mathcal{A}$ 使得 $\inf_{N(x)} \widehat{I} > a(\widehat{I}(x), \delta)$. 我们有

$$-I(x) \leq l\big(N(x)\big) \leq u\big(N(x)\big) \leq -\inf_{N(x)} \widehat{I} < -a\big(\widehat{I}(x), \delta\big).$$

因 δ 任意, 故有 $I(x) \geq \widehat{I}(x)$. 类似有 $\widehat{I}(x) \leq I(x)$, 所以 $I = \widehat{I}$. ∎

由上一命题, LLD 和 w*-ULD 是局部估计 (即邻域估计), 而 ULD 往往是整体估计, 在具体应用中往往也是较困难的.

在注 1.5(i) 中定义的 w-LDP 是否能导出速率函数的唯一性, 作者尚不知答案. 当然在局部紧情形, 由于 w-ULD⇔w*-ULD(见习题 1.7) 它是对的.

习　题

习题 1.7 证明下结果:

(i) w*-ULD⇒ w-ULD, 其逆在 X 局部紧时亦真;

(ii) ULD⇒ w*-ULD.

习题 1.8 对任意 $B \subset X$, 定义外测度、内测度如下:

$$\mu_\epsilon^{\text{out}}(B) = \inf\big(\mu_\epsilon(A) \mid A \in \mathcal{A},\ A \supset B\big),$$
$$\mu_\epsilon^{\text{int}}(B) = \sup\big(\mu_\epsilon(A) \mid A \in \mathcal{A},\ A \subset B\big).$$

证明下述结果:

(a) 若 LLD, 则 $\forall$ 开集 $G, \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon^{\text{int}}(G) \geq -\inf_G I$;

(b) 若 ULD, 则 $\forall$ 闭集 $F, \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon^{\text{out}}(F) \geq -\inf_F I$.

习题 1.9 设 $f(\epsilon), g(\epsilon) \geq 0$ 是两个定义在 $I \subset I\!R$ 上 $(o \in \overline{I})$ 的函数. 证明在 $[-\infty, +\infty]$ 中有

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log\big(f(\epsilon)+g(\epsilon)\big) = \max\Big(\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log f(\epsilon), \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log g(\epsilon)\Big).$$

习题 1.10 (a) 设 μ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ- 有限非负测度. 证明对任意 $\mathcal{A}$- 可测实函数 f

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \longrightarrow \|f\|_{L^\infty(\mu)} = \text{ess.sup}_X|f|.$$

(b) 设 $J: X \longrightarrow [0,+\infty]$ 下紧, $\mathcal{A}$- 可测, 连续, 且 (a) 中 μ 还满足对任意开集 $G \in \mathcal{A}, \mu(G) > 0$ 和 $\mu(J < +\infty) > 0$,

$$Z(\epsilon) = \int_X e^{-J/\epsilon} d\mu < +\infty.$$

证明

$$\mu_\epsilon \hat{=} \frac{\exp(-J/\epsilon)}{Z(\epsilon)} d\mu, \ \epsilon > 0$$

在 X 上满足速率函数为 $I(x) = J(x) - \inf_X J$ 的 LDP.

习题 1.11 设 $(\xi_n)_{n\geq 1}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的取值于 $\mathbb{R}^d$ 的独立同分布正态随机变量序列. 设 $m = (m_1, \cdots, m_j) = \mathbb{E}\xi_1$, 并设

$$\sigma = (\sigma_{ij}) = \left(\mathbb{E}[(\xi_1^i - m_i)(\xi_1^j - m_j)]\right)_{i,j=1,\cdots,d}$$

有逆. 利用 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k$ 的密度表达和习题 1.10 证明 $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in \cdot)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上满足速率函数为

$$I(x) = \frac{1}{2}\langle x - m, \sigma^{-1}(x - m)\rangle$$

的大偏差原理 (速度为 $\epsilon = 1/n$).

习题 1.12 若 ULD 成立, 则 $[I = 0]$ 非空, 且对任意开集 $G \in \mathcal{A}$, 满足 $G \supset [I = 0]$, 有 $\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(G^c) < 0$.

习题 1.13 设 $I: X \longrightarrow [0,+\infty]$ 下紧. 子集 $A \subset X$ 称为 I-正则的, 若

$$\inf_{A^o} I = \inf_{\overline{A}} I.$$

(a) 设 X 可度量化, ρ 为度量. $\forall x \in X$, 考虑函数

$$f(x,r) = \inf_{B(x,r)} I,$$

其中 $B(x,r) = \{y \in X | \rho(x,y) < r\}$. 注意到 $f(x,r)$ 是 r 的单调增函数且 $f(x,r+) = \inf\{I(y) | y \in \overline{B(x,r)}\}$, 由此推出 x 有一由 I- 正则子集构成的邻域基.

(b) 设 X 可度量化, ρ 为度量, 且 $\rho : (X\mathcal{A}) \longrightarrow (X\mathcal{A})$ 可测. 若对任何 I- 正则 $\mathcal{A}$- 可测子集 $A, l(A) = u(A) = \inf_A I$, 则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 满足 LDP.

(注: 此习题说明了引言中所用的 LDP 表述形式与定义 1.3 一致.)

§2. 三个基本原理

2.1 收缩原理

设 $X, \mathcal{A}, (\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 如 §1. 首先介绍

命题 2.1 (收缩原理) 设 Y 是另一正则 Hausdorff 空间, $f : X \to Y$ 连续. 记 $\mathcal{B} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ (它是 Y 上的 σ- 域). 令

$$\nu_\epsilon := \mu_\epsilon \circ f^{-1} \ (\text{即}\nu_\epsilon(B) = \mu_\epsilon\big(f^{-1}(B)\big), \forall B \in \mathcal{B}).$$

若 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的 LDP, 则 $(\nu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 Y 上满足速率函数为

$$I^f(y) \hat{=} \inf\{I(x) \mid x \in X : f(x) = y\}, \ \forall y \in Y \tag{2.1}$$

的 LDP.

证明 1) 先证明 $[I^f \le L] = f([I \le L])$. 显然 "$\supset$" 成立. 再设 $y \in [I^f \le L]$, 那么

$$\begin{aligned} L &\ge \inf\{I(x) \mid f(x) = y\} \\ &= \inf\{I(x) \mid I(x) \le L + 1, f(x) = y\}. \end{aligned}$$

根据命题 1.2, 存在 $x \in X, f(x) = y$, 使 $I(x) \leq L$, 即 $y \in f([I \leq L])$. 等式得证. 因此, 作为紧集的连续映像, $[I^f \leq L]$ 是 Y 中紧集.

2) 往证 LLD. 对任意开集 $O \in \mathcal{B}, f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$, 因此

$$\begin{aligned}\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \nu_\epsilon(O) &= \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon\big(f^{-1}(O)\big)\\ &\geq -\inf\{I(x) \mid x \in f^{-1}(O)\}\\ &= -\inf\{I^f(y(\mid y \in O\}.\end{aligned}$$

3) 类似可证 ULD. ∎

2.2 Laplace 原理

大偏差原理的一个主要结论是 Varadhan 于 1966 在 [Va1] 中建立的下述

定理 2.2 (Laplace 原理) 假设 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的 LDP, 则对任何 $\mathcal{A}$- 可测函数 $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, 若它满足

$$\lim_{M\to+\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_{[\Phi > M]} e^{\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon = -\infty \tag{2.2}$$

或者更强的条件: $\exists \delta > 0$, 使

$$\overline{P}\big((1-\delta)\Phi\big) = \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_X e^{(1+\delta)\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon < +\infty, \tag{2.3}$$

则有

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_X e^{\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon = \sup\big(\Phi(x) - I(x) \mid x \in X\big). \tag{2.4}$$

我们将这个重要结论的证明分为上界、下界两部分, 它们在许多应用中可单独起作用.

引理 2.3 设 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 满足 LLD, 则对任意 $\mathcal{A}$- 可测下半连续函数 $\Phi : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, 有

$$\begin{aligned}\underline{P}(\Phi) &\hat{=} \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_X e^{\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon\\ &\geq \sup\{\Phi(x) - I(x) \mid x \in X : \Phi(x) \wedge I(x) < +\infty\}. \end{aligned}\tag{2.5}$$

证明 固定 $x \in X$, 满足 $I(x) \wedge \Phi(x) < +\infty$. 仅需证 $\underline{P}(\Phi) \geq \Phi(x) - I(x)$. 注意到若 $\Phi(x) = -\infty$, 它自动成立, 因此现设 $\Phi(x) > -\infty$. 由 Φ 的下半连续性, $\forall \delta > 0, N \triangleq [\Phi > \Phi(x) - \delta]$ 是 x 的开邻域, 且 $N \in \mathcal{A}$. 所以 LLD 给出

$$\begin{aligned}\underline{P}(\Phi) &\geq \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_N e^{\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon \\ &\geq \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon \log e^{(\Phi(x)-\delta)/\epsilon} \mu_\epsilon(N) \\ &\geq \Phi(x) - \delta - I(x).\end{aligned}$$

因 $\delta > 0$ 任意, 得 (2.5). ∎

引理 2.4 设 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 满足 ULD. 对 $\mathcal{A}$- 可测上半连续函数 $\Phi : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, 若它满足 (2.2) 或 (2.3), 则有

$$\begin{aligned}&\overline{P}(\Phi) = \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_X e^{\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon \\ &\geq \sup\{\Phi(x) - I(x) \mid x \in X : \Phi(x) \wedge I(x) < +\infty\} < +\infty.\end{aligned} \tag{2.6}$$

证明 首先证明 (2.3)⇒(2.2). 事实上,

$$\begin{aligned}\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_{[\Phi \geq M]} e^{\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon &\leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_{[\Phi \geq M]} e^{[(1+\delta)\Phi - \delta M]/\epsilon} d\mu_\epsilon \\ &\leq -\delta M + \overline{P}\big((1+\delta)\Phi\big).\end{aligned}$$

所以 (2.3)⇒(2.2).

下面的证明分两种情形.

1) $\Phi \leq M$, $M \in \mathbb{R}_+$ 为一常数. 考虑紧集 $K_L = [I \leq L]$, 其中 $L \geq 0$ 任意. 对 $\delta > 0$ 及 $x \in K_L$, 根据 Φ, I 的下、上半连续性, 存在闭邻域 $N(x) \in \mathcal{A}$ 使得

$$\sup_{N(x)} \Phi < \begin{cases} \Phi(x) + \delta, & \text{若}\Phi(x) > -\infty, \\ -1/\delta, & \text{否则}, \end{cases}$$
$$\inf_{N(x)} I > a\big(I(x), \delta\big).$$

再取开邻域 $N_o(x)\in\mathcal{A}$ 使 $N_o(x)\subset N(x)$. 由有限覆盖定理，存在有限多个 $\{N_o(x_1),\cdots,N_o(x_n)\}$(其中 $x_i\in K_L$) 使

$$K_L\subset\bigcup_{k=1}^{n}N_o(x_k)\hat{=}G.$$

这样,

$$\begin{aligned}\int_X e^{\Phi/\epsilon}d\mu_\epsilon&=\int_G e^{\Phi/\epsilon}d\mu_\epsilon-\int_{G^c}e^{\Phi/\epsilon}d\mu_\epsilon\\&\le\sum_{k=1}^{n}\int_{N(x_k)}e^{\Phi/\epsilon}d\mu_\epsilon+e^{M/\epsilon}\mu_\epsilon(G^c)\\&\le\sum_{k=1}^{n}e^{b(\Phi(X_k),\delta)/\epsilon}\mu_\epsilon\big(N(x_k)+e^{M/\epsilon}\mu_\epsilon(G^c)\big),\end{aligned}$$

其中

$$b(t,\delta)=\begin{cases}t+\delta, & 若 t\in(-\infty,+\infty],\\-1/\delta, & 若 t=-\infty.\end{cases}$$

因此，利用习题 1.9 及由 ULD 得

$$\begin{aligned}\overline{P}(\Phi)&\le\max_{1\le k\le n}\Big(b(\Phi(x_k),\delta)+u(N(x_k))\Big)\vee\Big(M+u(G^c)\Big)\\&\le\max_{1\le k\le n}\Big(b(\Phi(x_k),\delta)+(-\inf_{N(x_k)}I)\Big)\vee\Big(M+(-\inf_{G^c}I)\Big)\\&\le\max_{1\le k\le n}\Big(b(\Phi(x_k),\delta)-a(I(x_k),\delta)\Big)\vee(M-L).\end{aligned}$$

先令 L $\to+\infty$, 次让 $\delta\to0$, 得

$$\begin{aligned}\overline{P}(\Phi)&\le\max_{1\le k\le n}\big(\Phi(X_k)-I(x_k)\big)\\&\le\sup_X(\Phi-I).\end{aligned}$$

2) 一般情形. 现在需要去掉 1) 中的上有界假设, 而这正是条件 (2.2) 的本质. 对任意 $M>0$, 令 $\Phi_M=\Phi\wedge M$. 我们有

$$\begin{aligned}\overline{P}(\Phi) &\le \limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\left[\int_X e^{\Phi_M/\epsilon}d\mu_\epsilon+\int_{[\Phi>M]}e^{\Phi/\epsilon}d\mu_\epsilon\right]\\ &=\overline{P}(\Phi_M)\vee A_M,\end{aligned}$$

其中 $A_M=\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\int_{[\Phi>M]}e^{\Phi/\epsilon}d\mu_\epsilon$. 所以由 1) 有

$$\begin{aligned}\overline{P}(\Phi) &\le \sup_X(\Phi_M-I)\vee A_M\\ &\le \sup\big(\Phi(x)-I(x)\mid x\in X, I(x)\wedge\Phi(x)<+\infty\big)\vee A_M.\end{aligned}$$

令 $M\to+\infty$, 条件 (2.2) 就给出 (2.6). ∎

定理 2.2 的证明 它是引理 2.3 和引理 2.4 的直接推论. ∎

2.3 Gibbs 原理

下面介绍 Laplace 原理的一个重要应用: Gibbs 原理. 它是由 Ellis 在 [E] 中首先得到并系统地加以应用的.

定理 2.5 (Gibbs 原理) 设 $(\mu_\epsilon,\epsilon\to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的 LDP,$\Phi: X\longrightarrow[-\infty,+\infty)$ 为一连续 $\mathcal{A}$- 可测函数, 并满足 $\sup_X(\Phi-I)>-\infty$. 若条件 (2.2) 成立, 则

$$\mu_\epsilon^\Phi(A)\hat{=}\frac{\int_A e^{\Phi/\epsilon}d\mu_\epsilon}{\int_X e^{\Phi/\epsilon}d\mu_\epsilon} \tag{2.7}$$

在 X 上满足速率函数为

$$I^\Phi(x)\hat{=}I(x)-\Phi(x)+P(\Phi) \tag{2.8}$$

的 LDP, 其中 $P(\Phi)$ 由 (2.4) 给出 (亦称压强泛函).

证明 首先注意到: 由引理 2.3 和 2.4 推出

$$-\infty<\sup_X(\Phi-I)\le\underline{P}(\Phi)=\overline{P}(\Phi)\le\sup_X(\Phi-I).$$

所以压强 $P(\Phi)$ 存在并且属于 $\mathbb{R}$. 下面的证明分为三点.

1) 下界. 对任意开 $G \in \mathcal{A}$, 令 $\Phi_G = \Phi 1_G - 1_{G^c}$,$\Phi_G$ 下半连续. 所以由引理 2.3 导出

$$\begin{aligned}\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon\mu_\epsilon^\Phi(G) &= \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_G e^{\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon - \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_X e^{\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon \\ &= \underline{P}(\Phi_G) - P(\Phi) \geq \sup\big(\Phi_G(x) - I(x) \mid x \in X\big) - P(\Phi) \\ &= \sup\big(\Phi(x) - I(x) \mid x \in G\big) - P(\Phi) \\ &= -\inf_G I^\Phi.\end{aligned}$$

2) 上界. 对任意闭 $F \in \mathcal{A}$, 令 $\Phi_F = \Phi 1_F - \infty 1_{F^c}$. 则 Φ_F 上半连续. 所以根据引理 2.4, 类似有

$$\begin{aligned}\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(F) &= \overline{P}(\Phi_F) - P(\Phi) \\ &\leq \sup\big(\Phi_F(x) - I(x) \mid x \in X\big) - P(\Phi) \\ &= -\inf_F I^\Phi.\end{aligned}$$

3) I^Φ 的下紧性. 显然 I^Φ 下半连续. 当 $\Phi \leq M$ 上有界时, $[I^\Phi \leq L] \subsetneq [I \leq L + M - P(\Phi)]$. 即 $[I^\Phi \leq L]$ 相对紧. 它又是闭的, 因此紧, 即 I^Φ 下紧. 下设 Φ 不是上有界的. 根据引理 2.3,

$$\begin{aligned}-\infty &= \lim_{M\to+\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_{[\Phi > M]} e^{\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon \\ &\geq \lim_{M\to+\infty} \sup_{[\Phi > M]} (\Phi - I).\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{M\to+\infty} \inf_{[\Phi > M]} (I - \Phi) = +\infty.$$

对于任意固定的 $L \geq 0$, 取 $M \geq 0$ 使 $\inf_{[\Phi > M]}(I - \Phi) > L - P(\Phi)$. 我们有

$$\begin{aligned}[I^\Phi \leq L] &= [I - \Phi \leq L - P(\Phi)] \\ &= [I - \Phi \leq L - P(\Phi)] \cap [\Phi \leq M](\text{闭}) \\ &\subset [I \leq L + M - P(\Phi)](\text{紧}).\end{aligned}$$

所以 $[I^\Phi \le L]$ 紧. ∎

习 题

习题 2.6 设 $(W_t)_{t\in[0,1]}$ 是从 0 出发取值于 $\mathbb{R}^d$ 的标准 Brown 运动. 设 $\tau = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ 是 $[0,1]$ 的一个分割, 令 w^τ 是连结 $\{w(t_0), w(t_1), \cdots, w(t_n)\}$ 的折线.

(a) 利用习题 1.11 证明

$$\mathbb{P}\big((\sqrt{\epsilon}W(t_0), \sqrt{\epsilon}W(t_1), \cdots, \sqrt{\epsilon}W(t_n)) \in \cdot\big)$$

在 $(\mathbb{R}^d)^{n+1}$ 上满足 LDP, 并写出其速率函数.

(b) 利用 (a) 和收缩原理证明 $\mathbb{P}(\sqrt{\epsilon}W^\tau \in \cdot)$ 在

$$C_0([0,1], \mathbb{R}^d) = \{w : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^d \mid w\text{连续}, w(0) = 0\}$$

上满足 LDP, 其速率函数为

$$I(w) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{w}(s)|^2 ds, & \text{若}w = w^\tau\text{是折线}, \\ +\infty, & \text{否则}. \end{cases}$$

习题 2.7 设 X 是波兰空间. 证明如下 Laplace 原理的逆: 设 I 是下紧速率函数且对任意 $\Phi \in C_b(X, \mathbb{R})$,

$$P(\Phi) \hat{=} \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_X e^{\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon = \sup_X (\Phi - I).$$

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的 LDP.

习题 2.8 设 X 为局部紧波兰空间, $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足 w-LDP. 若 $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续, $\Phi \le M$ 且 $-\Phi$ 下紧, 则

$$P(\Phi) = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_X e^{\Phi/\epsilon} d\mu_\epsilon = \sup_X (\Phi - I).$$

习题 2.9 定义 Gamma 函数

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt, \quad \lambda \in (0, +\infty).$$

(a) 证明

$$\lambda^{-\lambda+1}\Gamma(\lambda) = \lambda \int_0^{+\infty} t^{\lambda} e^{-\lambda t} dt.$$

(b) 利用习题 1.10 证明 $(\mu_\lambda(dt) = \lambda e^{-\lambda t} dt)$(指数分布族) 在 $\lambda \to +\infty$ 时满足 LDP, 速度为 $\epsilon = 1/\lambda$. 找出其速率函数.

(c) 证明 (从 (b) 和 Laplace 原理出发)

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \log\left(\lambda^{-\lambda+1}\Gamma(\lambda)\right) = -1.$$

(d) 推出近似 Stirling 公式

$$\Gamma(n+1) = n! = n^n e^{-n+o(n)}.$$

习题 2.10 在 Gibbs 原理 (定理 2.5) 的条件下, 证明

(i) 紧集 $[I^\Phi = 0]$ 非空;

(ii) 对任意开集 $G \supset [I^\Phi = 0]$, 存在 > 0, 使

$$\mu_\epsilon^\Phi(G^c) \le e^{-c/\epsilon + o(1/\epsilon)};$$

(iii) 若 $[I^\Phi = 0] = \{x\}$(单点集), 则 μ_ϵ^Φ 弱收敛于 δ_x, 即对任意有界连续函数 f, $\int_X f d\mu_\epsilon^\Phi \to \int_X f d\delta_x = f(x)$.

§3. 从弱 * 型大偏差原理到 LDP: 指数胎紧 * 性

在命题 1.6 中我们已看到, w*-LDP 是局部邻域估计, 而 LDP 是整体估计. 怎样从 w*-LDP 得到 LDP 在应用中往往是较困难的. 下述概念在此过渡中起着基础的作用.

3.1 指数胎紧 * 性

定义 3.1 称 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上是指数胎紧 * 的，若 $\forall L > 0$, 存在紧集 K_L, 使得对任何开集 $G \supset K_L, G \in \mathcal{A}$, 有

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(G^c) < -L. \tag{3.1}$$

定理 3.2 设 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的 w*-LDP, 则相应的 LDP 成立的充要条件是 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 是 指数胎紧 * 的.

证明 1) 必要性. 我们证明: "ULD⇒ 指数胎紧 * 性". 事实上, 对 $L > 0$, 取 $K_L = [I \le L]$, 则 $\forall$开$G \supset K_L (G \in \mathcal{A})$, 有

$$u(G^c) \le -\inf_{G^c} I < -L,$$

即 (3.1) 成立.

下面分两点来证明充分性.

2) 充分性 (I):I 的下紧性. 对任意 $L > 0$ 固定, 设 K_L 是由指数胎紧 * 性中确定的紧集. 仅需证 $[I \le L] \subset K_L$. 对 K_L 的任意闭邻域 $N \in \mathcal{A}$, 有

$$-\inf_{N^c} I \le l(N^c) \le u(N^c) < -L.$$

从而 $N^c \subset [I > L]$, 即 $[I \le L] \subset N$. 根据 X 的正则性和 $\mathcal{A}$ 的假设, 这样的闭邻域的交集为 K_L, 所以 $[I \le L] \subset K_L$.

3) 充分性 (II): ULD. 对任意闭集 $F \in \mathcal{A}$, 对任意 $L > 0$, 令 $F_L = F \cap K_L$, 其中 K_L 是出现在指数胎紧 * 性中的紧集. 不妨设 $K_L \supset [I \le L]$(否则取并集 $K_L \cup [I \le L]$). 此时,

$$\inf_{F_L} I \to \inf_F I \quad (L \to +\infty).$$

由 w*-ULD, $\forall \delta > 0$, 存在 F_L 的邻域 $O \in \mathcal{A}$ 使得

$$u(O) \le -a(\inf_{F_L} I, \delta).$$

$\forall x \in K_L$, 取可测开邻域 $N(x)$ 如下:

$$\begin{cases} \text{若} x \in F, & N(x) = O, \\ \text{若} x \notin F, & N(x) \cap F = \emptyset. \end{cases}$$

令 $\widetilde{G} = \bigcup_{x \in K_L} N(x)$. 根据有限覆盖定理, 存在有限多个 $\{N(x_i) \mid x_i \in K_L\}$ 使得

$$K_L \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i) \hat{=} G \subset \widetilde{G}.$$

于是 $G \in \mathcal{A}, G$ 为开集且

$$F \cap G \subset F \cap \widetilde{G} = O.$$

从而有

$$\begin{aligned} u(F) &= u\big((F \cap G) \cup (F \cap G^c)\big) \\ &\leq u(F \cap G) \vee u(G^c) \\ &\leq u(O) \vee (-L) \\ &\leq [-a(\inf_{F_L} I, \delta)] \vee (-L). \end{aligned}$$

在上式中令 $L \to +\infty$, $\delta \to 0$ 即得 $u(F) \leq -\inf_F I$. ∎

注 3.3 上面的证明给出:

(i) 若 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 满足 w*-ULD 和指数胎紧 * 性, 且 I 下紧, 则相应的 ULD 成立;

(ii) ULD⇒ 指数胎紧 * 性.

3.2 列指数胎紧性

在这一小节恒假定 X 是波兰空间 (即可度量化、完备、可分), $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$.

定义 3.4 称 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 是列指数胎紧的, 若对任意子列 $\epsilon(n) \to 0, \forall L > 0$, 存在紧集 K_L 使得

$$\limsup_{\epsilon(n) \to 0} \epsilon(n) \log \mu_{\epsilon(n)}(K_L^c) < -L. \tag{3.2a}$$

注 3.5 (i) 称 $\{\mu_\epsilon, \epsilon > 0\}$ 是指数胎紧的, 若 $\forall L > 0$, 存在紧集 K_L, 使得

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(K_L^c) < -L. \tag{3.2b}$$

当 $\{\mu_\epsilon, \epsilon > 0\}$ 为可数时，它与上面定义等价.

(ii) 回忆著名的 Prokohov 定理： $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 列相对紧(即任意子列 $(\mu_{\epsilon(n)}, \epsilon(n) \to 0)$ 含某一收敛子列 $(\mu_{\epsilon(n_k)}, \epsilon(n_k) \to 0)$), 当且仅当 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$列胎紧, 即对任一子列 $\epsilon(n) \to 0, \forall \delta > 0$, 存在紧集 K 使

$$\limsup_{n\to 0} \mu_{\epsilon(n)}(K^c) < \delta. \tag{3.3}$$

所以定义 3.4 是列胎紧的一种强化形式.

下述定理中的必要性属于 Lynch–Sethuraman(见 [LS]).

定理 3.6 设 X 是波兰空间， $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的 w-LDP. 则相应的 LDP 成立的充要条件是 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 列指数胎紧.

证明 充分性的证明与定理 3.2 类似, 但简单得多, 这里略去. 下面证必要性. 不妨设 $\{\mu_\epsilon, \epsilon = \epsilon(n)\}$ 可数. 简记 $\mu_n = \mu_{\epsilon(n)}$. 设 $\{x_i, i = 1, 2, \cdots,\}$ 是 X 中的一可数稠密子集. 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, \frac{1}{k}) = X, \ \forall k \geq 1,$$

其中 $B(x, r)$ 是以 x 为圆心， r 为半径的开球.

令 $\Gamma_{2kL} = [I \leq 2kL], k \geq 1$ 为整数. 则存在有限覆盖

$$\Gamma_{2kL} \subset \bigcup_{i=1}^{m(k)} B(x_i, \frac{1}{k}) \hat{=} A(k).$$

根据 LDP, 有

$$\mu\big(A(k)^c\big) \leq -\inf_{A(k)^c} I \leq -\inf_{(\Gamma_{2kL})^c} \leq -2kL.$$

即存在 $N=N(k)$, 使对任意 $n\geq N$,

$$\mu_n\big(A(k)^c\big)\leq \exp\big(-\frac{kL}{\epsilon(n)}\big).$$

对 $n=1,2,\cdots,N$, 选取

$$B(k)=\bigcup_{i=1}^{M(k)}B(x_i,\frac{1}{k}),$$

其中 $M(k)\geq m(k)$ 满足

$$\mu_n\big(B(k)^c\big)\leq \exp\big(-\frac{kL}{\epsilon(n)}\big),\ n=1,2,\cdots,N.$$

这样，上式事实上对所有 $n\geq 1$ 成立．注意到

$$K\hat{=}\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{B(k)}$$

全有界且闭，因而紧． $\forall n\geq 1$, 我们有

$$\mu_n(K^c)\leq \sum_{k=1}^{\infty}\mu_n\big(B(k)^c\big)\leq \frac{\exp(-L/\epsilon(n))}{1-\exp(-L/\epsilon(n))}.$$

由此证得指数胎紧性. ∎

下面介绍指数胎紧性的一个有效的充分条件.

命题 3.7 假设存在 $\Phi: X\longrightarrow[0,+\infty]$ 下紧，使得

$$\overline{P}(\Phi)\hat{=}\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\int_X e^{\Phi/\epsilon}d\mu_\epsilon<+\infty,$$

则 $(\mu_\epsilon,\epsilon\to 0)$ 是指数胎紧的.

证明 $\forall L>0$, 令 $K+L=[\Phi\leq L]$. 它是紧的. 注意到

$$\mu_\epsilon(K_L^c)\leq e^{-L/\epsilon}\int_{[\Phi>L]}e\Phi/\epsilon d\mu_\epsilon$$
$$\leq e^{-L/\epsilon}\int_X e^{\Phi/\epsilon}d\mu_\epsilon,$$

因此有

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(K_L^c)\leq -L+\overline{P}(\Phi),$$

即 (3.26) 成立. ∎

习 题

习题 3.8 设 X 是波兰空间. 称 μ_ϵ 弱收敛于 μ_0, 若 $\forall f\in C_b(X)$,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_X fd\mu_\epsilon=\int_X fd\mu_0.$$

证明如下事实等价:

(i) μ_ϵ 弱收敛于 μ_0;

(ii) 对任意开集 G,$\liminf_{\epsilon\to 0}\mu_\epsilon(G)\geq\mu_0(G)$;

(iii) 对任意闭集 F,$\limsup_{\epsilon\to 0}\mu_\epsilon(F)\leq\mu_0(F)$;

(iv) $\forall f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续并满足一致可积性:

$$\lim_{M\to\infty}\sup_{\epsilon>0}\int_{[|f|>M]}|f|d\mu_\epsilon=0,$$

有

$$\int_X f\,d\mu_\epsilon\to\int_X f\,d\mu_0\ .$$

习题 3.9 设 $M_1(X)$ 是波兰空间 X 上的概率测度全体, 赋予弱收敛拓扑. 回忆著名的 Prokohov 定理: $\mathbb{B}\subset M_1(X)$ 是相对紧的, 当且仅当 $\mathbb{B}$胎紧, 即 $\forall\delta>0$, 存在紧集 $K\subset X$, 使得

$\sup_{\mu\in\mathbb{B}}\mu(K^c)<\delta$. 证明 $\mathbb{B}$ 胎紧，当且仅当它是胎紧 * 的，即 $\forall\delta>0$, 存在紧集 K, 使得对任何开集 $G\supset K$, 有 $\sup_{\mu\in\mathbb{B}}\mu(G^c)<\delta$.

习题 3.10 在 Gibbs 原理 (定理 2.5) 中，设 X 是波兰空间. 证明 $\{\mu_\epsilon^\Phi,\epsilon\to 0\}$ 是列相对紧的，且其任一极限点 ν 都满足

$$\nu[I^\Phi=0]=1.$$

习题 3.11 设 X 是局部紧空间，$\mathcal{A}=\mathcal{B}(X)$. 证明指数胎紧性等价于指数胎紧 * 性.

习题 3.12 设 $(\mu_\epsilon^j:\epsilon>0,j\in\mathbb{I})$ 是一族 X 上的概率测度，其中 $(\mathbb{I},\mathcal{J},\alpha)$ 是测度空间. 对 $A\in\mathcal{A}$, 定义

$$l_\alpha^u(A)=\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\text{ess.sup}_{j\in\mathbb{I}}\mu_\epsilon^j(A), \tag{3.4a}$$

$$l_\alpha^p(A)=\text{ess.inf}_{j\in\mathbb{I}}\liminf_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon^j(A), \tag{3.4b}$$

$$u_\alpha^*(A)=\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\text{ess.sup}_{j\in\mathbb{I}}\mu_\epsilon^j(A), \tag{3.4c}$$

$$u_\alpha^p(A)=\text{ess.sup}_{j\in\mathbb{I}}\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon^j(A). \tag{3.4d}$$

(注意在 (3.4b) 中

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon^j(A)=\lim_{\epsilon\to 0}\text{ess.inf}_{\epsilon<\delta}\epsilon\log\mu_\epsilon^j(A),$$

它在 $\epsilon=\epsilon(n)\to 0$ 时与通常定义同，同样理解 (3.4d).)

在大偏差的各种定义中 (见定义 1.3 和 1.4), 将 $l_\alpha^u(\cdot),u_\alpha^u(\cdot)$ 代替 $l(\cdot),u(\cdot)$, 我们就得到所谓的 本性一致(LLD,w*-ULD,ULD,LDP) 等等. 同样地，将 $l_\alpha^p(\cdot)$ 及 $u_\alpha^p(\cdot)$ 代替 $l(\cdot)$ 及 $u(\cdot)$, 就得到 本性点态(LLD,w*-ULD,ULD,LDP) 等等.

(a) 证明命题 1.6 和收缩原理对本性一致或本性点态大偏差成立.

(b) 定义

$$\begin{pmatrix}\overline{P}_\alpha^u(\Phi)\\ \underline{P}_\alpha^u(\Phi)\end{pmatrix}=\lim_{\epsilon\to 0}\begin{pmatrix}\sup\\ \inf\end{pmatrix}\epsilon\log\begin{pmatrix}\text{ess. sup}_{j\in\mathbb{I}}\\ \text{ess. inf}_{j\in\mathbb{I}}\end{pmatrix}\int_X e^{\Phi/\epsilon}d\mu_\epsilon^j, \tag{3.5}$$

类似定义点态压强泛函 $\overline{P}^{p}_{\alpha}(\Phi), \underline{P}^{p}_{\alpha}(\Phi)$. 证明：若本性一致 (相应地，本性点态)LDP 成立，则对满足 $\exists\delta > 0$ 使得

$$\overline{P}^{u}_{\alpha}((1+\delta)\Phi) < +\infty$$
$$(\text{相应地，} \overline{P}^{p}_{\alpha}((1+\delta)\Phi) < +\infty) \tag{3.6}$$

的连续 $\mathcal{A}$- 可测 $\Phi : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, 有

$$\overline{P}^{u}_{\alpha}(\Phi) = \underline{P}^{u}_{\alpha}(\Phi) = \sup(\Phi - I \mid \Phi \wedge I < +\infty)$$
$$(\text{相应地}, P^{p}_{\alpha}(\Phi) = \underline{P}^{p}_{\alpha}(\Phi) = \sup(\Phi - I \mid \Phi \wedge I < +\infty)). \tag{3.7}$$

(c) 类似定义本性一致 (或点态) 指数胎紧 * 性. 证明在本性一致 (或点态)w*-LDP 成立的情况下，相应的本性一致 (点态)LDP 等价于本性一致 (点态) 指数胎紧 * 性.

(d) 证明相应的 Gibbs 原理.

注 Lynch-Sethuraman 定理 (定理 3.6) 中的必要性部分对本性一致 (或点态)LDP 不成立，这是高付清教授通过反例指出的. 所以指数胎紧 * 性的应用更广泛.

§4. 比较方法

比较方法作为收缩原理的推广，是一种应用极广泛的技巧. 在这节我们介绍它的一种基本形式.

命题 4.1 设 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的一族概率测度，$I : X \longrightarrow [0, +\infty]$ 下紧. 设 (Y, ρ) 是度量空间，$\mathcal{B}$ 是 Y 中一个包含所有

$$B(y, r) = \{y' \in Y : \rho(y', y) < r\}$$

的 σ- 域. 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ 可测的. 假设存在一列 X 到 Y 的连续可测映射 (f_n), 使得 $\nu^n_\epsilon \doteq \mu_\epsilon(f_n \in \cdot)$ 当 $\epsilon \to 0$ 时在 Y 上满足速率函数为

$$I^{f_n}(y) \doteq \inf\{I(x) \mid x \in X : f_n(x) = y\}$$

的 LDP. 若下述二条件成立

$$\sup_{[I\le L]} \rho(f_n, f) \to 0\ (n \to +\infty),\ \forall L > 0, \tag{4.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon\big(\rho(f_n, f) > \delta\big) = -\infty,\ \forall \delta > 0, \tag{4.2}$$

则 $(\nu_\epsilon = \mu_\epsilon(f \in \cdot), \epsilon \to 0)$ 在 Y 上满足速率函数为

$$I^f(y) \hat{=} \inf\big(I(x) \mid x \in X\ :\ f(x) = y\big)$$

的 LDP.

证明 1) I^f 的下紧性. 由条件 (4.1),$\forall L \ge 0$, $f : [I \le L] \longrightarrow Y$ 连续. 因此, 根据命题 1.2, $f([I \le L]) = [I_f \le L]$ 为紧集.

2) LLD. 对任意给定开集 $G \in \mathcal{B}$, 设 $x \in X$, 使 $I(x) < +\infty$ 且 $y = f(x) \in G$, 取球

$$B(y, \delta) \subset B(y, 2\delta) \subset G.$$

对 n 足够大, 条件 (4.1) 蕴含

$$x \in [f_n \in B(y, \delta)] \subset [f \in G] \cup [\rho(f_n, f) \ge \delta].$$

因此,

$$\begin{aligned} -I(x) &\le \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon\big(f_n \in B(y, \delta)\big) \\ &\hat{=} l\big(f_n \in B(y, \delta)\big) \\ &\le l(f \in G) \vee l\big(\rho(f_n, f) \ge \delta\big). \end{aligned}$$

令 $n \to +\infty$. 由条件 (4.2) 得

$$l(f \in G) = \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(f \in G) \ge -I(x).$$

由于 $x \in [I < +\infty] \cap f^{-1}(G)$ 是任意的, 故得

$$l(f \in G) \ge -\inf_G I^f.$$

3) w*-ULD. 对 $y \in Y, \forall r > 0$, 有

$$[f \in B(y,r)] \subset [f_n \in B(y,2r)] \cup [\rho(f_n, f) > r].$$

因此

$$\begin{aligned} u\big(f \in B(y,r)\big) &\le u\big(f_n \in B(y,2r)\big) \vee u\big(\rho(f_n,f) > r\big) \\ &\le [-\inf\{I^{f_n}(y') \mid y' \in \overline{B(y,2r)}\}] \vee u\big(\rho(f_n,f) > r\big). \end{aligned}$$

令 $n \to +\infty$, 记

$$\limsup_{n\to\infty} \inf_{B(y,r)} I^{f_n} = b(r),$$

由条件 (4.2) 得 $u\big(f \in B(y,r)\big) \le -b(3r)$. 为证 w*-ULD, 根据命题 1.6, 剩下只要证明

$$L \doteq \limsup_{r\to 0} b(r) \ge I^f(y).$$

若 $L = +\infty$, 则上式显然. 下设 $L < +\infty$. 对 $\delta > 0$, 对充分小 r, 有

$$\begin{aligned} L + \delta > b(2r) &= \limsup_{n\to\infty} \inf\{I(x) \mid f_n(x) \in B(y,2r), I(x) \le L+\delta\} \\ &\ge \inf\{I(x) \mid f(x) \in B(y,r), I(x) \le L+\delta\} (\text{条件 } (4.1)) \\ &\ge \inf\{I(x) \mid f(x) \in B(y,r)\} = \inf_{B(y,r)} I^f. \end{aligned}$$

令 $r \to 0$, 由 I^f 的下半连续性, 我们就得到欲证结论.

4) ULD. 只需证指数胎紧*性. $\forall L > 0$, 记 $K_L = f([I \le L])$, 则 K_L 紧. $\forall \delta > 0$, 记

$$N(K_L, \delta) = \{y \in Y, \rho(y, K_L) < \delta\}.$$

则有

$$\begin{aligned} &\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \nu_\epsilon\big(N(K_L,\delta)^c\big) \\ &= \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon\big(\rho(f,K_L) \ge \delta\big) \\ &\le \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon\big([\rho(f_n,f) > \delta/2] \cup [\rho(f_n,K_L) \ge \delta/2]\big) \\ &\le u\big([\rho(f_n,f) > \delta/2]\big) \vee \big(-\inf\{I(x) \mid \rho(f_n(x),K_L) \ge \delta/2\}\big). \end{aligned}$$

令 $n \to +\infty$, 同时注意到条件 (4.1) 蕴含: 对足够大的 n,

$$[I \le L] \cap [\rho(f_n, K_L) \ge \delta/2] = \emptyset,$$

我们就得到

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \nu_\epsilon\big(N(K_L,\delta)^c\big) \le -\limsup_{n\to\infty}\{I(x) \mid \rho\big(f_n(x), K_L\big) \ge \delta/2\}, \\ \le -L.$$

指数胎紧 * 性得证. ∎

命题 4.2 设 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为 I 的 LDP, $(Y, \rho, \mathcal{B})$ 如命题 4.1. 给定 $f_\epsilon : X \longrightarrow Y$ 可测 $(\epsilon > 0)$, 令

$$\nu_\epsilon(\cdot) = \mu_\epsilon(f_\epsilon \in \cdot), \ \epsilon > 0.$$

假定存在一列连续映射 $\{f_\epsilon^n(x) = f^n(\epsilon, x) : [0, +\infty) \times X \longrightarrow Y\}_{n \ge 1}$ 满足

$$f^n(0,x) \longrightarrow f(0,x) \text{ 在} x \in [I \le L] \text{上一致} (\forall L > 0), \quad (4.1)'$$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon\big(\rho(f_\epsilon^n, f_\epsilon) > \delta\big) = -\infty, \forall \delta > 0, \quad (4.2)'$$

则 $(\nu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 Y 上满足速率函数为

$$J(y) = \inf\{I(x) \mid x \in X : I(x) < +\infty \text{和} f(0,x) = y\} \qquad (4.3)$$

的 LDP.

证明 仅需证对任一子列 $(\epsilon(k) \to 0), \{\nu_{\epsilon(k)}, k \to \infty\}$ 满足 LDP. 因此不妨设 $(\epsilon = \epsilon(k), k \ge 1)$ 是可数列.

考虑乘积空间 $\widetilde{X} = \{0, \epsilon(k); k \ge 1\} \times X$(作为 $\mathbb{R}^+ \times X$ 的拓扑子空间) 及

$$\widetilde{\mu}_{\epsilon(k)}(dt, dx) = \delta_{\epsilon(k)}(dt)\mu_{\epsilon)k)}(dx), \ k \ge 1.$$

容易验证 $(\widetilde{\mu}_{\epsilon(k)}, \epsilon(k) \to 0)$ 在 $\widetilde{X}$ 上满足速率函数为

$$\widetilde{I}(t,x) = \begin{cases} I(x), & 若 t = 0, \\ +\infty, & 否则 \end{cases}$$

的 LDP. 考虑映射

$$\widetilde{f}_n : \widetilde{X} \longrightarrow Y \ , \ \widetilde{f}_n(t,x) = f^n(t,x) \ .$$

定义 $\widetilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow Y$ 如下:

$$\widetilde{f}(t,x) = \begin{cases} f_t(x), & 若 t > 0, \\ f(0,x), & 若 t = 0 且 x \in [I < +\infty], \\ y_0, & 若 t >= 0 且 I(x) = +\infty, \end{cases}$$

其中 $y_0 \in Y$ 是某一事先固定点. 因 $\{0, \epsilon(k); k \geq 1\}$ 可数, 上述映射是可测的, 且 $\widetilde{f}_n$ 是连续的. 将命题 4.1 应用于 $(\widetilde{\mu}_{\epsilon(k)}, \widetilde{f}, \widetilde{f}_n)$, 并注意到条件 (4.1)′,(4.2)′ 分别成为 (4.1) 和 (4.2), 便知 $(\widetilde{\mu}_{\epsilon(n)}(\widetilde{f} \in \cdot), \epsilon(n) \to 0)$ 在 Y 上满足速率函数为

$$\begin{aligned} I^{\widetilde{f}}(y) &= \inf\{\widetilde{I}(t,x) \mid \widetilde{I}((t,x) < +\infty, \widetilde{f}(t,x) = y\} \\ &= \inf\{I(x) \mid I(x) < +\infty, f(0,x) = y\} = J(y) \end{aligned}$$

的 LDP. 而

$$\widetilde{\mu}_{\epsilon(k)}(\widetilde{f} \in \cdot) = \mu_{\epsilon(k)}(f_{\epsilon(k)} \in \cdot) = \nu_{\epsilon(k)}(\cdot),$$

命题得证. ∎

注意在此命题中 $f(0,x)$ 仅在 $[I < +\infty]$ 上有定义, 这在用比较方法证明 Ventcel–Freidlin 定理中是有用的.

习　题

习题 4.3 设 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足大偏差原理, Y 是另一正则拓扑空间, 其上有 σ- 域 $\mathcal{B}$ 包含 Y 中任一点 y 的一个开邻域

基和一个闭邻域基. 假设 $f : X \longrightarrow Y$ 可测 (关于 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$), 并且存在一列 X 中递增闭集 $\{F_L, > 0\}$, 满足:

(i) $f : F_L \longrightarrow Y$连续,

(ii) $\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(F_L^c) < -L$,

则 $(\nu_\epsilon \hat{=} \mu_\epsilon(f \in \cdot), \epsilon \to 0)$ 在 Y 上满足速率函数为 I_f 的 LDP.

习题 4.4(Schilder 定理, 续习题 2.6) 设 $(W_t)_{t\in[0,1]}$ 是从 0 点出发取值于 $\mathbb{R}^d$ 的 Brown 运动. 对 $w \in C_0([0,1], \mathbb{R}^d)$ 令 $f_n(w)$ 为连接 $\left\{\left(\frac{k}{w^n}, w(\frac{k}{2^n}), k = 0, 1, 2, \cdots, 2^n\right)\right\}$ 的折线. 定义 $I(w)$ 如 (0.14).

(a) 利用习题 2.6, 说明 $\mathbb{P}(\sqrt{\epsilon f_n}(W) \in \cdot)$ 在 $C_0([0,1], \mathbb{R}^d)$ 上满足速率函数为 $I^{f_n}(w) \hat{=} \inf\{I(\tilde{w}_| f_n(\tilde{w}) = w\}$ 的 LDP.

(b) 证明 $\sup_{w\in[I\le L]} \|f_n(w) - w\| \to 0, \ \forall L > 0$.

(c) 证明 $\forall \delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mathbb{P}(\sqrt{\epsilon}\|f_n(W) - W\| > \delta) = -\infty.$$

提示: 利用 Lévy 等式: 对一维标准 Brown 运动 (B_t),

$$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T} B_t > x) = 2\mathbb{P}(B_T > x).$$

(d) 由命题4.1 导出Schilder 定理: $\mathbb{P}(\sqrt{\epsilon}W \in \cdot)$ 在$C_0([0,1], \mathbb{R}^d)$ 上满足速率函数为 I 的 LDP.

习题 4.5(续上题) 设 $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ 且 $|V(x)| \le C(1 + |x|^\alpha)$, 其中 $C > 0, 0 \le \alpha < 2$. 考虑偏微分方程

$$\frac{\partial u^2(t,x)}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2}\Delta u^\epsilon + (V/\epsilon)u^\epsilon, \ u^\epsilon(0,x) \equiv 1.$$

已知其解由如下 Feynman–Kac 公式给出

$$u^\epsilon(t,x) = \mathbb{E}^x \exp \int_0^t \frac{1}{\epsilon} V(x + \sqrt{\epsilon}W_s) ds.$$

(a) 证明 (0.15) 和 (0.16) 成立.

(b) 考虑规一化测度

$$\mu_\epsilon^V(dw) = \frac{\exp \frac{1}{\epsilon}\int_0^1 V(x+\sqrt{\epsilon}W_s)ds}{u^\epsilon(1,x)},$$

证明 $(\mu_\epsilon^V, \epsilon \to 0)$ 在 $C([0,1], I\!R^d)$ 上满足 LDP, 并找出其速率函数 I^V.

(c) 证明 $\xi \in [I^V = 0]$ 当且仅当 ξ 是 Newton 方程 (0.16) 的解.

(d) 推出 μ_ϵ^V 弱收敛于 Dirac 测度 δ_ξ.

§5. 乘积空间和投影极限空间上的 LDP

乘积空间作为随机过程的取值空间, 在概率论中的作用是众所周知的. 本节讨论乘积空间上的大偏差及其应用.

5.1 乘积空间上的 LDP

设 $\boldsymbol{T}$ 是非空指标集, $(X_i)_{i\in \boldsymbol{T}}$ 是一族正则 Hausdorff 拓扑空间, $\mathcal{A}_i$ 是 X_i 中的一个 σ- 域, 它包含了 X_i 的任一点的一个开邻域基和一个闭邻域基. 考虑乘积拓扑空间

$$X = \prod_{i\in \boldsymbol{T}} X_i \hat{=} \{x = (x_i)_{i\in \boldsymbol{T}} \mid x_i \in X_i, \forall i \in \boldsymbol{T}\}.$$

对 $J \subset \boldsymbol{T}$, 考虑投影映射

$$P_J : X \longrightarrow \prod_{j\in J} X_i \hat{=} X_J,\ x = (x_i)_{i\in \boldsymbol{T}} \longmapsto (x_i)_{i\in J}.$$

若 $J = \{i\}$, 则简记 $p_i = p_{\{i\}}$. 在 X 上赋予乘积 σ- 域

$$\mathcal{A} = \prod_{i\in \boldsymbol{T}} \mathcal{A}_i = \sigma(p_i : X \longrightarrow (X_i \mathcal{A}_i) \mid i \in \boldsymbol{T}).$$

容易看出 X 仍是正则空间，$\mathcal{A}$ 包含 X 中任一点 x 的一个开邻域和一个闭邻域基.

下一命题的证明留给读者作为习题.

命题 5.1 (a) P_J 是连续映射，且将 X 的开集映成 X_J 中的开集；

(b) 若 $A \in \mathcal{A}$, 则存在 可数$J \subset \boldsymbol{T}$, 使得

$$A \in \mathcal{A}_J \hat{=} \sigma(p_i \mid i \in J),$$

或等价地，$\mathcal{A} = \bigcup_{J \text{ 可数}} \mathcal{A}_J$.

(c) 设 $\boldsymbol{T}$ 不可数，$X_i = \{0,1\}, \forall i \in \boldsymbol{T}$. 证明 X 中的单点集不是 $\mathcal{A}$– 可测的 (所以 $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}(X)$).

设 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 是乘积空间 $(X, \mathcal{A})$ 上的一族概率测度，定义

$$\mu_\epsilon^J = \mu_\epsilon(P_J \in \cdot) \tag{5.1}$$

(即 μ_ϵ^J 为 μ_ϵ 在 $(X_j, \mathcal{A}_J)$ 上的边缘分布).

定理 5.2 若对任意有限 $J \subset \boldsymbol{T}$, $(\mu_\epsilon^J, \epsilon \to 0)$ 在 $X_J = \prod_{i \in J} X_i$ 上满足速率函数为I^J的LLD(相应地, w*-ULD;ULD;w*-LDP;LDP), 则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $X = \prod_{i \in \boldsymbol{T}} X_i$ 上满足速率函数为

$$I(x) = \sup_{\text{有限} J \subset \boldsymbol{T}} I^J((P_J(x)) \tag{5.2}$$

的 LLD(相应地，w*-ULD;ULD;*-LDP;LDP).

证明 1) LLD. 首先

$$\begin{aligned}[I \leq L] &= \{x \in X \mid I^J(P_J(x)) \leq L\} \\ &= \bigcap_{J \text{ 有限}} P_J^{-1}([I^J \leq L])\end{aligned}$$

是闭集，从而 I 是 X 上的速率函数. 对 $x \in X$, 令

$$\mathcal{N} = \{P_J^{-1}(N_J) | J\text{有限}, \ N_J \text{ 是 } P_J(x) \text{ 的邻域且 } N_J \in \mathcal{A}_J\}.$$

则 $\mathcal{N}$ 是 x 的一个邻域基. 对 $N\in\mathcal{N},N=P_J^{-1}(N_J)$, 其中 $J\subset\boldsymbol{T}$ 有限，有

$$\begin{aligned}\liminf_{\epsilon\to0}\epsilon\log\mu_\epsilon(N)&=\liminf_{\epsilon\to0}\epsilon\log\mu_\epsilon^J(N_J)\\&\ge -I^J\big(P_J(x)\big)\ge -I(x).\end{aligned}$$

由命题 1.6,$(\mu_\epsilon,\epsilon\to0)$ 在 X 上满足 LLD.

2) w*-ULD. 固定 $x\in X.\forall\delta>0$, 取有限的 J, 使得

$$I^J\big(P_J(x)\big)>a\big(I(x),\delta\big).$$

而根据 $(\mu_\epsilon^J,\epsilon\to0)$ 的 w*-ULD, 存在 $\mathcal{A}_J$- 可测邻域 $N_J\ni P_J(x)$ 使得

$$\limsup_{\epsilon\to0}\epsilon\log\mu_\epsilon^J(N_J(x))<-a\big(I(x),\delta\big).$$

取 $N=P_J^{-1}(N_J)$, 它是 $x\in X$ 的 $\mathcal{A}$– 可测邻域且

$$u(N)<-a\big(I(x),\delta\big).$$

仍由命题 1.6,w*-ULD 成立.

3) ULD. 由 2),$(\mu_\epsilon,\epsilon\to0)$ 满足 w*-ULD. 根据定理 3.2, 仅需证 I 下紧和指数胎紧 * 性.

首先，记 $I^i=I^{\{i\}}$, 它在 X_i 上是下紧的 (假设). 而

$$\begin{aligned}[I\le L]&=\bigcap_{J\text{ 有限}}P^{-1}J([I^J\le L])\\&\subset\prod_{i\in\boldsymbol{T}}[I^i\le L].\end{aligned}$$

根据 Tychonov 定理，紧集的乘积是紧集，从而 $[I\le L]$ 紧.

下面证明指数胎紧 * 性. 对 $L\le0$, 取 $K_L=\prod_{i\in\boldsymbol{T}}[I^i\le L]$. 对任意 $\mathcal{A}$- 可测开集 $G\supset K_L$, 由 K_L 的紧性和有限覆盖定理，不难

证明存在某个有限 $J \subset \boldsymbol{T}$, 和 $[I^i \le L]$ 的开邻域 $G_i \in \mathcal{A}_i (i \in J)$, 使得

$$P_J^{-1}\big(\prod_{j\in J} G_i\big) \subset G.$$

因此,

$$\begin{aligned}\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(G^c) &\le \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \sum_{j\in J} \mu_\epsilon^i (G_i^c)\\ &= \max_{i\in J} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon^i(G_i^c) \le -L,\end{aligned}$$

即 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 是指数胎紧 * 的.

4) w*-LDP 和 LDP 是上述几点的组合. ∎

推论 5.3 设 Z 是 $X = \prod_{j\in J} X_i$ 的一个拓扑子空间, $\mu_\epsilon \in M_1(Z, Z \cap \mathcal{A})$.

(a) 若对任意有限 J,$(\mu_\epsilon^J, \epsilon \to 0)$ 在 X_J 上满足速率函数为 I^J 的 LLD(相应地, w*-ULD, w*-LDP), 则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 Z 上满足速率函数为 $I|_Z$(其中 I 由 (5.2) 定义) 的 LLD(相应地, w*-ULD; w*-LDP).

(b) 若对任意有限 J,$(\mu_\epsilon^J, \epsilon \to 0)$ 在 X_J 上满足速率函数为 I^J 的 ULD(相应地, LDP), 且若下述条件之一被满足:

$$Z\text{是 } X \text{ 的闭子集}, \tag{5.3}$$

$$[I < +\infty] \subset Z(\text{其中 } I \text{ 由 (5.2) 定义}), \tag{5.4}$$

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 Z 上满足速率函数为 $I|_Z$ 的 ULD (相应地, LDP).

证明 它是定理 5.2 的直接推论. ∎

注 (1) 若没有 (5.3) 或 (5.4), 则 (b) 不成立. 更注意到在 LDP 情形 (即 $(\mu_\epsilon^J, \epsilon \to 0)$ 满足 LDP,$\forall$ 有限 J), 若 (5.3) 成立, 则由速率函数唯一性知 $I(x) = +\infty, \forall x \in Z^c$. 即此时 (5.3)⇒(5.4). 在下章中将看到条件 (5.4) 的本质.

(2) 设 $\mathbb{J}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 中的有限子集, 满足: $\forall$ 有限 $J \subset \boldsymbol{T}, \exists J' \in \mathbb{J}$ 使 $J \subset J'$. 若将定理 5.2 、推论 5.3 的条件换为 "对 $J \in \mathbb{J}$" 成立, 则它们仍正确.

推论 5.4 设 $\mu_\epsilon^i \in M_1(X_i, \mathcal{A}_i)$, 而 μ_ϵ 是乘积测度

$$\mu_\epsilon = \prod_{i\in \boldsymbol{T}} \mu_\epsilon^i \in M_1(X, \mathcal{A}). \tag{5.5}$$

如果 $(\mu_\epsilon^i, i \in \boldsymbol{T})$ 在 X_i 上满足速率函数为 I^i 的 LLD(相应地, w*-ULD;w*LDP;ULD;LDP), 则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足同类大偏差, 其速率函数为

$$I(x) = \sum_{i\in \boldsymbol{T}} I^i\big(P_i(x)\big),\ \forall x \in X. \tag{5.6}$$

证明 由定理 5.2, 仅需证 $\boldsymbol{T}$ 为有限情形. 记 $\boldsymbol{T}=\{1,2,\cdots,n\}$.
1) LLD. 设 $x \in X, x = (x_1, \cdots, x_n)$. 则集合族

$$\{N = N_1 \times \cdots \times N_n; N_i\text{是 } x_i \text{ 的开可测邻域}, i = 1, \cdots, n\}$$

构成 x 的一个邻域基. 而且对这样的邻域 N, 有

$$\begin{aligned} l(N) &= \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(N_1 \times \cdots \times N_n) \\ &= \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \prod_{i=1}^n \mu_\epsilon^i(N_i) \\ &\geq -\sum_{i=1}^n I^i(x) = -I(x). \end{aligned}$$

由此证得 LLD.

2) w*-ULD. 对 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in X$, 取 x_i 的可测邻于 N_i, 使

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon^i(N_i) < \begin{cases} -I^i(x_i) + \delta, & \text{若} I^i(x_i) < +\infty, \\ -1/\delta, & \text{否则}, \end{cases}$$

$i = 1, \cdots, n$. 取 $N = N_1 \times \cdots \times N_n$, 它是 x 的可测邻域, 且

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(N) &= \limsup_{\epsilon\to 0} \sum_{i=1}^n \epsilon \log \mu_\epsilon^i(N_i) \\ &< \begin{cases} -I(x) + n\delta, & \text{若} I(x) < +\infty, \\ -1/\delta + n\delta, & \text{若} I(x) = +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

根据命题 1.6,$(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 满足 ULD.

3) ULD. 由 2),$(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 满足 w*-ULD. 剩下指数胎紧 * 性的证明与定理 4.2 中的证明完全类似.

4) w*-LDP 和 LDP 是上述结论的组合. ∎

5.2 连续轨道空间或右连左极轨道空间上的大偏差

设 $(\xi^\epsilon : t \longrightarrow \xi^\epsilon(t); t \in [0,T])_{\epsilon>0}$ 是一族定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上取值于波兰空间 E 的随机过程. 自然地可将 ξ^ϵ 看成是从 $(\Omega, \mathcal{F}\mathbb{P})$ 到乘积空间 $E^{[0,T]}$ 中的可测映射, 即 ξ^ϵ 是取值于 $E^{[0,T]}$ 的随机变量. 但乘积空间上的拓扑和可测结构都极贫乏, 因此概率论学者主要研究放在"右连续且有左极限"和"连续"过程上. 更精确地, 引入

$$C([0,T],E) = \{w : [0,T] \longrightarrow E \mid w\text{连续}\}, \tag{5.7a}$$

$$d_T(w_1, w_2) = \sup_{0 \le t \le T} \rho\big(w_1(t), w_2(t)\big), \tag{5.7b}$$

其中 ρ 为 E 中的度量. 易证 $(C([0,T],E), d_T)$ 是完备可分的度量空间, 即波兰空间, 且它的 Borel σ- 域 $\mathcal{B}$ 为 $\sigma(w(t) \mid t \in [0,T])$. 当 ξ^ϵ 的轨道 $(t \longrightarrow \xi^\epsilon(t))$ 连续时, 就可将 ξ^ϵ 看成是取值于 $(C([0,T],E),\mathcal{B})$ 的随机变量.

更一般地, 引入"右连左极"轨道空间

$$\mathbb{D}([0,T],E) = \{w : [0,T] \longrightarrow E \mid w\text{右连续且有左极限}\}, \tag{5.8}$$

它关于 (5.7b) 中的一致度量 d_T 是完备的, 但不是可分的. 记 Skorokhod 度量为 s_T. 熟知 $(\mathbb{D}([0,T], s_T)$ 是波兰空间, 且其 Borel σ-域 $\mathcal{B}$ 仍是 $\sigma(w(t) \mid t \in [0,T])$.

命题 5.5 设 $\{(\xi_t^\epsilon)_{t\in[0,T]}; \epsilon > 0\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上具有连续轨道的一族随机过程. 假设对任意有限 $J \subset [0,T]$, 边缘分布族 $\mathbb{P}((\xi_t^\epsilon)_{t\in J} \in \cdot)$ 当 $\epsilon \to 0$ 时在 E^J 上满足速率函数为 I^J 的 LDP. 若

过程分族 $\mu_\epsilon \hat{=} \mathbb{P}(\xi^\epsilon \in \cdot)$ 在 $(C([0,T],E),d_T)$ 上是列指数胎紧的，则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(C([0,T],E),d_T)$ 上满足速率函数为

$$I(w) = \sup_{J \text{ 有限}} I^J\big(P_J(w)\big),\ \forall w \in C([0,T],E)$$

的 LDP.

证明 不妨设 $(\epsilon = \epsilon(n), n \in \mathbb{N})$ 是可数的. 为了简便，记 $X = C([0,T],E)$. 它作为 $E^{[0,T]}$ 的子集，就继承了乘积拓扑. 用 "σ_p" 记此拓扑 (它是 X 上的 "点点收敛" 拓扑，它比一致收敛拓扑 "d_T" 要弱得多).

由推论 5.3,$(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 (X,σ_p) 上满足 w*LDP, 速率函数为 I. 而 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 (X,d_T) 上指数胎紧，因而在 (X,σ_p) 上指数胎紧. 根据定理 3.2,$(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 (X,σ_p) 上满足 LDP.

下面剩下要从 "σ_p" 过渡到 "d_T". 对任意 $L > 0$, 记 K_L 是 (X,d_T) 中的紧集，使得

$$\mu(K_L^c) = \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(K_L^c) < -L.$$

下一事实是关键：在紧集 K_L 上 "σ_p" 与一致收敛拓扑是相同的，也就是说恒等映射 Id 是从 $(K+L,\sigma_P)$ 到 (X,d_T) 的连续映射. 因此利用习题 4.3, $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 (X,d_T) 上满足 LDP. ∎

下面的命题更加实用些，但其本质仍是同样的.

命题 5.6 设 $\big((\xi_t^\epsilon)_{t\in[0,T]}, \epsilon > 0\big)$ 是定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的一族右连左极过程. 设对 $J \subset [0,T]$ 有限，边缘分布族 $\mathbb{P}\big((\xi_t^\epsilon)_{t\in J} \in \cdot\big)$ 在 E^J 上满足速率函数为 I^J 的 LDP. 若对任意 $\delta > 0$,$t \in [0,T]$,

$$\lim_{h\to 0+} \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mathbb{P}\Big(\sup_{t\le s\le t+h} \rho(\xi_t^\epsilon, \xi_s^\epsilon) > \delta\Big) = -\infty, \tag{5.9}$$

则过程分布族 $(\mu_\epsilon \hat{=} \mathbb{P}(\xi^\epsilon \in \cdot), \epsilon \to 0)$ 在 $(\mathbb{D}([0,T],E),d_T)$ 上满足速率函数为

$$I(w) = \sup_{J \text{ 有限}} I^J\big(\rho_J(w)\big), \qquad w \in \mathbb{D}([0,T],E)$$

的大偏差原理，且 $[I<+\infty]\subset C([0,T],E)$.

证明 主要想法是利用比较方法 (命题 4.1). 为此，考虑

$$f_n:\ E^{[0,T]}\longrightarrow \mathbb{D}([0,T],E),$$
$$f_n(w)(t)=w(\frac{kT}{n}),\ \frac{kT}{n}\le t<\frac{(k+1)T}{n},\ n\ge 1$$

和

$$f:\ E^{[0,T]}\longrightarrow \mathbb{D}([0,T],E),$$
$$f(w)=\begin{cases} w, & \text{若}w\in \mathbb{D}([0,T],E)\subset E^{[0,T]},\\ w_0, & \text{否则},\end{cases}$$

其中 $w_0\in \mathbb{D}([0,T],E)$ 是任意固定的一点.

1) 验证 $[I<+\infty]\subset C([0,T],E)$ 和条件 (4.1). 对 $L\ge 0$ 固定，$\forall\delta>0$, 取 $h>0$ 使 $\forall t\in[0,T]$,

$$u(t,h)\hat{=}\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log \mathbb{P}\Big(\sup_{t\le s\le t+h}\rho(\xi_t^\epsilon,\xi_s^\epsilon)>\delta\Big)<-L. \tag{5.10}$$

设 $\mathbb{D}$ 是 $[0,T]$ 中的任意可数稠密子集，则

$$A(t,\mathbb{D})\hat{=}\{w\in E^{[0,T]}\mid \sup_{t\le s\le t+h,s\in\mathbb{D}}\rho(w_t,w_s)>\delta\}$$

是 $E^{[0,T]}$ 中的可测开集. 应用定理 5.2 的 LLD, 有

$$-\inf_{w\in A(t,\mathbb{D})}I(w)\le\liminf_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mathbb{P}\big(\xi^\epsilon\in A(t,\mathbb{D})\big)<-L,$$

它蕴含 $[I\le L]\subset A(t,\mathbb{D})^c$. 从而有

$$\begin{aligned}[I\le L]\subset&\bigcap_{\mathbb{D}\text{ 可数}}\bigcap_{t\in[0,T]}A(t,\mathbb{D})^c\\ &\subset\{w\in E^{[0,T]}\mid\forall s,t\in[0,T],|s-t|\le h\Rightarrow\rho(w_t,w_s)\le\delta\}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

这表明 $[I \le L]$ 等度连续，特别地，$[I \le L] \subset C([0,T],E)$.

另外，$\{w_t \mid I(w) \le L\} \subset \{w_t \mid I^t(w_t) \le L\}$ 相对紧，根据 Arzelà–Ascoli 定理，$[I \le L]$ 在 $C([0,T]),E)$ 中相对紧．而 $[I \le L]$ 在 $E^{[0,T]}$ 中闭 (即在 $C([0,T],E)$ 中关于 σ_p 闭), 所以它关于更强的拓扑 d_T 仍是闭的．从而 $[I \le L]$ 关于 d_T 紧.

条件 (4.1) 是公式 (5.11) 的直接推论.

2) 验证条件 (4.2). 由于

$$[d(f_n,f)>\delta]\cap \mathbb{D}([0,T],E)\subset\bigcup_{k=0}^{n-1}\{w|\sup_{\frac{kT}{n}\le t\le\frac{(k+1)T}{n}}\rho(w_t,w_{\frac{k}{n}})<\delta\},$$

利用 (5.10) 中的记号得

$$\begin{aligned}\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon\big(d(f_n,f)>\delta\big)&\le\max_{0\le k\le n-1}u\big(kT/n,T/n\big)\\&\le\sup_{t\in[0,T]}u\big(t,T/n\big).\end{aligned}\tag{5.12}$$

当 $n\to+\infty$, 最后一项趋于 $-\infty$(根据条件 (5.9)), 因而条件 (4.2) 得证．这样就完成了此命题的证明. ∎

5.3 投影极限空间上的大偏差

设 $(\boldsymbol{T},\le)$ 是非空良偏序指标集．假设 $\forall i\le j$, 存在连续满射 $p_{ij}: X_j \longrightarrow X_i$. 此时，可引入如下的

定义 5.7 $(X_i, i\in\boldsymbol{T})$ 的投影极限空间是乘积空间 $\prod_{i\in\boldsymbol{T}}X_i$ 的子空间 $\{(x_i)_{i\in\boldsymbol{T}} \mid \forall i\le j,\ p_{ji}(x_j)=x_i\}$, 记为 $p\text{-}\lim(X_i,i\in\boldsymbol{T})$, 或者 $p\text{-}\lim_{i\in\boldsymbol{T}}X_i$.

显然 $p\text{-}\lim(X_i,i\in\boldsymbol{T})$ 是 $\prod_{i\in\boldsymbol{T}}X_i$ 的闭子空间.

命题 5.8 设 $(\mu_\epsilon,\epsilon>0)$ 是 $Z=p\text{-}\lim(X_i,i\in\boldsymbol{T})$ 上关于 $Z\bigcap\mathcal{A}$ 的一族概率测度．令 $\mu_\epsilon^i=\mu_\epsilon\circ(p_i)^{-1}=\mu_\epsilon(p_i\in\cdot)$. 若 $(\mu_\epsilon^i,\epsilon\to 0)$ 在 X_i 上满足速率函数为 I^i 的 LLD(相应地，w*-ULD;w*-LDP;ULD,LDP), 则 $(\mu_\epsilon,\epsilon\to 0)$ 在 Z 上满足速率函数为

$$I(x)=\sup_{i\in\boldsymbol{T}}I^i\big(p_i(x)\big)\tag{5.13}$$

的同类大偏差估计.

证明 对任意有限 $J \subset \boldsymbol{T}$, 取 $j' \in \boldsymbol{T}$ 使

$$\forall j \in J\ ,\ j \leq j'.$$

令 $J' = J \bigcup \{j'\}$. 考虑映射

$$\begin{aligned} f:\quad & X_{j'} \longrightarrow X_{J'}, \\ & x_{j'} \longmapsto \left(p_{jj'},(x_{j'})\right)_{j\in J'}, \end{aligned}$$

它是连续单射且 $f(X_{j'})$ 是闭集. 注意到 $\mu_\epsilon^{J'} = \mu_\epsilon^{j'} \circ f^{-1}$, 易知 $(\mu_\epsilon^{J'}, \epsilon \to 0)$ 在 $X_{J'}$ 上满足同类的大偏差估计, 其速率函数为

$$I^{J'}(x) = \begin{cases} I^i\left(f^{-1}(x)\right), & \text{若} x \in f(X_{j'}), \\ +\infty, & \text{否则}. \end{cases}$$

现在可应用推论 5.3(及其注), 得到此命题结论. ∎

第二章 Cramér 方法

从 Cramér(1938) 关于独立随机变量和大偏差估计的先驱工作中， Gärtner(1977) 抽象出本质内容，后经一大批学者的工作，而形成 Cramér 方法. 它是大偏差理论中最为广泛、有力的工具之一，有众多应用. 本章目的在于整理总结有关这一方法直到近期的工作.

本章需要关于凸函数的一些基本结果 (见附录). 建议读者先阅读附录及其相关文献再读此章.

§ 0. 一般框架

设 X 是实局部凸拓扑向量空间， Y 是其拓扑对偶空间 X' 的子空间，满足 $\forall x \in X$,

$$(\langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in Y) \Longrightarrow x = 0.$$

这里 $\langle x, y\rangle$ 是连续线性泛函 $y \in Y \subset X'$ 在 x 上的作用.

熟知 X 是正则的. 固定 X 的 σ- 域为

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}_Y(X) = \sigma(\langle \cdot, y\rangle \mid y \in Y).$$

设 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的一族概率测度.

依照 §1.2 中压强泛函的定义，令

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &\hat{=} \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_X \exp\{\langle x, y\rangle/\epsilon\} d\mu_\epsilon(x) \qquad (0.1) \\ &\left(= \overline{P}(\langle \cdot, y\rangle)\right),\ \forall y \in Y. \end{aligned}$$

恒假设

$$\Lambda(y) > -\infty,\ \forall y \in Y, \qquad (0.2)$$

亦即 $\Lambda : Y \to (-\infty, +\infty]$. 称 Λ 为 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 的 Cramér 泛函.

引理 0.1 $\Lambda(0) = 0$ 且 Λ 是 Y 上的凸函数.

证明 $\Lambda(0) = 0$ 显然. 为证 Λ 的凸性, 设 $\lambda \in (0,1)$. 据 Hölder 不等式, 有: $\forall y_1, y_2 \in Y$,

$$\int_X e^{\langle x, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \rangle} d\mu_\epsilon(x)$$
$$\leq \Big[\int_X (e^{\langle x, \lambda y_1 \rangle})^{\frac{1}{\lambda}} d\mu_\epsilon(x) \Big]^\lambda \Big[\int_X (e^{\langle x, (1-\lambda) y_2 \rangle})^{\frac{1}{1-\lambda}} \Big]^{1-\lambda},$$

从而

$$\Lambda(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \leq \lambda \Lambda(y_1) + (1-\lambda) \Lambda(y_2),$$

此即 Λ 的凸性. ∎

Cramér 方法的实质在于所谓的 Legendre 变换:

$$\Lambda_Y^*(x) = \sup\{\langle x, y \rangle - \Lambda(y) \mid y \in Y\}, \forall x \in X. \tag{0.3}$$

记 X 的自身拓扑 (或强拓扑) 为 "s", 用 $\sigma(X,Y)$ 表示 X 上由函数族 $\{x \longrightarrow \langle x, y \rangle | y \in Y\}$ 生成的拓扑 (即使得 $\langle \cdot, y \rangle, y \in Y$ 都为连续函数的最粗拓扑). 显然 "s" 比弱拓扑 $\sigma(X, X')$ 来得强, 而 $\sigma(X, X')$ 比 $\sigma(X,Y)$ 强 (因为 $Y \subset X'$). 作为连续线性函数族的上确界, $\Lambda_Y^* : X \longrightarrow [0, +\infty]$ 是凸的, 关于 $\sigma(X,Y)$ 下半连续.

下述命题说明了 Λ_Y^* 在 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 的大偏差估计中的重要作用.

命题 0.2 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(X, \sigma(X,Y))$ 上满足速率函数为 Λ_Y^* 的 ω^*-ULD. 特别地, 此 ω^*-ULD 在 X 上关于强拓扑 "s" 亦成立.

证明 第二个结论是第一个的推论, 这是因为 $\sigma(X,Y)$ 比 "s" 弱. 下证关于 $\sigma(X,Y)$ 的 ω^*-ULD.

任意固定 $x_0 \in X$. 对任意 $\delta > 0$, 取 $y_0 \in Y$ 使

$$\langle x_0, Y_0 \rangle - \Lambda(y_0) > \begin{cases} \Lambda^*(x_0) - \delta & \text{若} \Lambda^*(x_0) < +\infty, \\ 1/\delta & \text{否则}. \end{cases} \tag{0.4}$$

再取

$$N(x_0)=\{x\in X \mid \langle x,y_0\rangle-\Lambda(y_0)>a(\Lambda^*(x_0),\delta)\},$$

其中 $a(\Lambda^*(x_0),\delta)$ 是 (0.4) 的右端. 则 $N(x_0)$ 是 x_0 关于 $\sigma(X,Y)$ 的一个开邻域且 $\in\mathcal{A}$. 由于

$$\begin{aligned}\mu_\epsilon(N(x_0)) &\le \int_{N(x_0)}\exp\frac{\langle x,y_0\rangle-\Lambda(y_0)-a(\lambda^*(x_0),\delta)}{\epsilon}d\mu_\epsilon(x)\\ &\le \exp\frac{-\Lambda(y_0)-a(\Lambda^*)x_0),\delta)}{\epsilon}\int_X\exp(\langle x,y_0\rangle/\epsilon)d\mu_\epsilon(x),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mu\big(N(x_0)\big) &= \limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon\big(N(x_0)\big)\\ &\le -\Lambda(Y_0)-a(\Lambda^*(x_0),\delta)+\Lambda(y_0)\\ &= -a\big(\Lambda^*(x_0),\delta\big).\end{aligned}$$

据命题 I.1.7, 即得 ω^*-ULD. ∎

所以, 关于 Cramér 方法剩下要考虑的主要问题在于怎样得到相应的 ULD 和 LLD. 我们将分三种情形来讨论:

I. X 为有限维情形 (即经典情形);

II. X 为无限维, 但关于弱拓扑 $\sigma(X,Y)$ 情形;

III. X 为无限维, 关于自身拓扑 "s" 情形.

我们将看到情形 III 的 Cramér 方法尚没有一般的理论结果, 有待读者去开垦.

§1. 有限维情形

此节假设 $\dim X=d$ 有限. 此时必然有 $\dim Y=d$. 因此不妨设

$$X=Y=\mathbb{R}^d,$$

且 $\langle x,y\rangle$ 是 $I\!R^d$ 总的欧氏内积. 简记 $\Lambda^*(x)=\Lambda^*_Y(x)$. 此时 "$s$" $=\sigma(X,Y)$.

1.1 大偏差上界 (ULD)

命题 1.1 下述性质等价

(a) $(\mu_\epsilon,\epsilon\to 0)$ 在 $X=I\!R^d$ 上满足速率含数为 Λ^* 的 ULD;

(b) $\forall x\in X,\exists\delta>0$, 使 $\Lambda(\delta x)<+\infty$;

(c) $\exists\delta>0$, 使

$$\overline{P}(\delta\|x\|)\hat{=}\limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\int_X e^{\delta\|x\|/\epsilon}d\mu_\epsilon(x)<+\infty,$$

其中 $\|x\|=|x_1|+\cdots+|x_d|$.

证明 (b)$\Rightarrow$(c). 记 $(e_i)_{i=1,\cdots,d}$ 是 $X=I\!R^d$ 的标准正交基. 将性质 (b) 应用于 $x=\pm e_i$, 于是 $\exists\delta>0$, 使

$$\Lambda(\pm\delta e_i)<+\infty,\qquad \forall i=1,2,\cdots,d.$$

而

$$\begin{aligned}\log\int_X\exp\frac{\delta\|x\|}{2d\epsilon}d\mu_\epsilon(x)&=\log\int_X\exp\frac{\delta}{2d\epsilon}\sum_{i=1}^d(x_i^++x_i^-)d\mu_\epsilon(x)\\&\le\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^d\big(\log\int_X e^{\delta x_i^+/\epsilon}d\mu_\epsilon+\log\int_X e^{\delta x_i^-/\epsilon}d\mu_\epsilon\big)\\&\le\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^d\big(\log\int_X e^{\delta x_i/\epsilon}d\mu_\epsilon+\log\int_X e^{-\delta x_i/\epsilon}d\mu_\epsilon\big),\end{aligned}$$

这里第一个不等式是基于 Jensen 不等式 (见习题 1.13). 所以

$$\overline{P}(\frac{\delta}{2d}\|x\|)\le\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^d\big(\Lambda(\delta e_i)+\Lambda(-\delta e_i)\big)<\infty,$$

即 (c) 成立.

(c)⇒(a). 据凸分析中的 Moreau 定理 (见附录 (A.9)),(b) ⇒ Λ^* 的下紧性. 据定理 I.3.2, 仅需证指数胎紧性. 取 $\delta > 0$ 使 $\overline{P}(\delta\|x\|) < +\infty$. 对 $L > 0$, 取

$$K_L = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \le \frac{1}{\delta}[L + \overline{P}(\delta\|x\|)]\right\}.$$

简记 $C(L,\delta) = \frac{1}{\delta}(L + \overline{P}(\delta\|x\|))$, 则有

$$\begin{aligned}\mu(K_L^c) &= \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(K_L^c) \\ &\le \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_X \exp \frac{\delta(\|x\| - C(L,\delta))}{\epsilon} d\mu_\epsilon(x) \\ &= -\delta C(L,\delta) + \overline{P}(\delta\|x\|) = -L.\end{aligned}$$

指数胎紧性得证.

(a)⇒(b): 首先 (a) 中的 ULD 推出 $[\Lambda^* = 0]$ 非空 (见习题 1.13), 从而 Λ 的重 Legendre 变换

$$\Lambda^{**}(y) = \sup\{\langle x, y\rangle - \Lambda^*(x) \mid x \in X\} \tag{1.1}$$

满足

$$\Lambda^{**}(0) = 0.$$

下面的证明为凸分析. 据附录中的 Fenchel-Legendre 定理 (A.8),Λ^{**} 是凸函数 Λ 的下半连续修正 Λ^Γ. 进一步据 Moreau 定理 (A.9), $\Lambda^\Gamma = \Lambda^{**}$ 在 0 点连续, 即存在球 $B(0,r)$ 使 $B(0,r) \subset [\Lambda^\Gamma < +\infty]^o$(内集). 而据附录命题 (A.4), $\mathrm{Dom}\Lambda \doteq \{x \in X \mid \Lambda(x) < +\infty\}$ 的相对内点集 $\mathrm{ri}(\mathrm{Dom}\Lambda)$ 满足

$$\mathrm{ri}(\mathrm{Dom}\Lambda) = \mathrm{ri}(\mathrm{Dom}\Lambda^\Gamma) = [\Lambda^\Gamma < +\infty]^o \supset B(0,r),$$

即 (b) 成立. ∎

1.2. 大偏差下界

此小节恒设极限

$$\Lambda(y)=\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\int_X e^{\langle x,y\rangle/\epsilon}d\mu_\epsilon(x)\in(-\infty,+\infty] \tag{1.2}$$

存在且满足 $(\mathrm{Dom}\Lambda)^o=[\Lambda<+\infty]^o$ 非空 (即命题 1.1.(b) 成立). 记 $C_s(\Lambda^*)$ 为凸函数 Λ^* 的严格凸点集，其定义为

$$\begin{aligned}x_0\in C_s(\Lambda^*)\Leftrightarrow \exists y_0\in(\mathrm{Dom}\Lambda)^o\text{使}\forall x\in X, x\neq x_0,\\ \text{有}\Lambda^*(x)>\Lambda^*(x_0)+\langle x-x_0,y_0\rangle.\end{aligned} \tag{1.3}$$

它可以通过 Λ 的微分性质来刻画:

$$\mathrm{Dom}(\nabla\Lambda)=\{y\in(\mathrm{Dom}\Lambda)^o\mid \lambda\text{在 } y \text{ 点可微分}\},$$

$$\mathrm{Ran}(\nabla\Lambda)=\{\text{梯度}\nabla\Lambda(y)\mid y\in\mathrm{Dom}(\nabla\Lambda)\}.$$

则 $C_s(\Lambda^*)=\mathrm{Ran}(\nabla\Lambda)$.

下面是关键的

引理 1.2 设 $x_0\in C_s(\Lambda^*)$. 则对任意开集 $G\ni x_0$, 有

$$l(G)\doteq\liminf_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(G)\geq-\Lambda^*(x_0), \tag{1.4a}$$

特别地,

$$l(G)\geq-\inf_{G\cap C_s(\Lambda^*)}\Lambda^*. \tag{1.4b}$$

证明 主要想法在于考虑

$$\nu_\epsilon(A)=\frac{\int_A e^{\langle y_0,x\rangle/\epsilon}d\mu_\epsilon(x)}{\int_X e^{\langle y_0,x\rangle/\epsilon}d\mu_\epsilon(x)}, \tag{1.5}$$

其中 $y_0\in(\mathrm{Dom}\Lambda)^o$ 是由 (1.3) 决定的某个点. 概率测度族 $(\nu_\epsilon,\epsilon\to 0)$ 的 Cramér 泛函为

$$\begin{aligned}\Lambda_{y_0}&\doteq\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\int_X e^{\langle x,y\rangle/\epsilon}d\nu_\epsilon(x)\\ &=\Lambda(y+y_0)-\Lambda(y_0).\end{aligned}$$

其 Legendre 变换为

$$\begin{aligned}\Lambda_{y_0}^* &= \sup\left(\langle x, y\rangle - \Lambda_{y_0}(y) \mid y \in Y\right)\\ &= \Lambda(y_0) - \langle x, y_0\rangle + \Lambda^*(x).\end{aligned}$$

因 $y_0 \in (\mathrm{Dom}\Lambda)^o$,$\Lambda_{y_0}$ 满足命题 1.1 中的性质 (b), 因此对所有 x_0 的开邻域 N(据命题 1.1.(a)),

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}}\,\epsilon \log \nu_\epsilon(N^c) \le -\inf_{x\in N^c} \Lambda_{y_0}^*(x). \tag{1.6}$$

又因为对 $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned}\Lambda_{y_0}^* &> \Lambda(y_0) - \langle x, y_0\rangle + \Lambda^*(x_0) + \langle x - x_0, y_0\rangle\\ &= \Lambda(y_0) + \Lambda^*(x_0) - \langle x_0, y_0\rangle \ge 0\end{aligned}$$

(事实上， =0, 留给读者验证). 而下紧函数 $\Lambda_{y_0}^*$ 在闭集 N^c 上达到下确界，所以 (1.6) 的右端严格小于零．由此推出

$$\nu_\epsilon(N^c) \to 0(\epsilon \to 0),\ \forall x_0\text{的开邻域}N.$$

对任意 $\delta > 0$, 我选取 x_0 的开邻域 $N \subset G$ 满足

$$\langle x_0, y_0\rangle < \langle x_0, y_0\rangle + \delta,\ \forall x \in N,$$

就有

$$\begin{aligned}\mu_\epsilon(G) \ge \mu_\epsilon(N) &= \int_X e^{\langle x, y_0\rangle/\epsilon} d\mu_\epsilon(x) \int_N e^{-\langle x, y_0\rangle/\epsilon} d\nu_\epsilon(x)\\ &\ge \int_X e^{\langle x, y_0\rangle/\epsilon} d\mu_\epsilon(x)\, e^{-(\langle x_0, y_0\rangle+\delta)/\epsilon} \nu_\epsilon(N).\end{aligned}$$

利用已证关键事实： $\nu_\epsilon(N) \to 1$, 得

$$l(G) \ge \Lambda(y_0) - \langle x_0, y_0\rangle - \delta \ge -\Lambda^*(x_0) - \delta.$$

因 δ 任意， (1.4a) 得证．最后， (1.4b) 是 (1.4a) 的平凡推论． ∎

现在仅需假定适当条件使

$$\inf_{G\cap C_S^*(\Lambda^c)}\Lambda^* = \inf_G\Lambda^*,\ \forall G\text{开}$$

成立，即得到所需的 LLD. 这正是下述条件 (1.7) 的本质.

定理 1.3 若 Λ^* 满足

$$\forall x\in \mathrm{Dom}\Lambda^*, \exists (x_n)\subset C_s(\Lambda^*)\text{ 使 } x_n\to x \text{ 且 } \liminf_{n\to\infty}\Lambda^*(x_n)\le \Lambda^*(x), \tag{1.7}$$

则 $(\mu_\epsilon,\epsilon\to 0)$ 在 $X=I\!R^d$ 上满足速率函数为 Λ^* 的 LDP.

证明 它是命题 1.1 和引理 1.2 的直接推论. ∎

下面通过凸分析将 (1.7) 化为关于 Λ 的条件. 回忆 Λ 在 $y_0\in(\mathrm{Dom}\Lambda)^o$ Gateaux- 可导，是指 $\forall y\in Y$,

$$\frac{d}{d\epsilon}\Lambda(y_0+\epsilon y)\Big|_{\epsilon=0}\text{ 存在.}$$

在有限维情形，它与 Λ 在 y_0 点的可微分性是等价的.

称凸函数 $\Lambda: I\!R^d\longrightarrow(-\infty,+\infty]$ 本性光滑, 若

(i) $(\mathrm{Dom}\lambda)^o$ 非空;

(ii) Λ 在 $(\mathrm{Dom}\Lambda)^o$ 上 Gateaux- 可导;

(iii) 当 $y_n\in(\mathrm{Dom}\Lambda)^o$ 趋于 $\mathrm{Dom}\Lambda$ 的边界时, $\|\nabla\Lambda(y_n)\|\to+\infty$.

因全空间 $I\!R^d$ 没有边界点，所以一个在 $I\!R^d$ 上取有限值的 Gateaux- 可导凸函数永远是本性光滑的.

本性光滑性的一个重要推论是 (见 [E], p.224−225):

$$\mathrm{ri}(\mathrm{Dom}\Lambda^*)\subset C_s(\Lambda^*)=\mathrm{Ran}\nabla V\subset \mathrm{Dom}\Lambda^*. \tag{1.8}$$

而对任意 $x_1\in\mathrm{Dom}\Lambda^*$,$x_0\in\mathrm{ri}(\mathrm{Dom}\Lambda^*)$, 有

$$x_\lambda\doteq x_0+\lambda(x_1-x_0)\in\mathrm{ri}(\mathrm{Dom}\Lambda^*),\ \forall\lambda\in(0,1),$$

$$\lim_{\lambda\to 1-}\Lambda^*(x_\lambda)=\lim_{\lambda\to 1-}\Lambda^*(x_0+\lambda(x_1-x_0))\le\Lambda^*(x_1)$$

(单变量凸函数的简单性质). 所以 (1.8) 比 (1.7) 强.

综上所述我们证明了

定理 1.4 在此小节假设 (1.2) 下，当 Cramér 泛函 Λ 在 $Y=\mathbb{R}^d$ 上本性光滑，或更特别地在全空间 $\mathbb{R}^d$ 上 Gateaux- 可导时，$(\mu_\epsilon, \epsilon\to 0)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上满足速率函数为 Λ^* 的 LDP.

1.3 两个应用

在此小节中设 $(\xi_i)_{i\geq 1}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的一串独立同分布随机变量. 记

$$\alpha=\mathcal{L}(\xi_1)\,(\text{即}\xi_1\text{的分布测度}),$$
$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,.$$

1.3A 大偏差估计

定理 1.5 (经典 Cramér 定理, 见 [Cr]) 假设

$$\forall\lambda>0, \mathbb{E}e^{\lambda\|\xi_i\|}<+\infty, \tag{1.9}$$

定义

$$\Lambda(y)=\log\int_{\mathbb{R}^d}e^{\langle x,y\rangle}d\alpha(x),\ \forall y\in\mathbb{R}^d, \tag{1.10a}$$
$$\Lambda^*(x)=\sup(\langle x,y\rangle-\Lambda(y)\mid y\in\mathbb{R}^e). \tag{1.10b}$$

则 $(\mathbb{P}(S_n/n\in\cdot), n\to\infty)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上满足速率函数为 Λ^*、速度为 $\epsilon=1/n$ 的 LDP.

证明 对 $\epsilon=\epsilon(n)=1/n$, 定义

$$\mu_\epsilon(n)=\mathbb{P}\big(S_n/n\in\cdot\big),$$

它所对应的 Cramér 泛函为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int_{R^d}e^{\langle x,y\rangle n}d\mu_{\epsilon(n)}(x)\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \mathbb{E}\exp(\langle S_n/n,y\rangle n)\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(\mathbb{E}e^{\langle\xi_1,y\rangle})^n\\
&\quad=\log\mathbb{E}e^{\langle\xi_1,y\rangle}=\Lambda(y).
\end{aligned}
$$

在条件 (1.9) 下，可用控制收敛定理证明 $\Lambda(y)$ 在全空间 $\mathbb{R}^d$ 上 Gateaux 可导，且

$$
\nabla\Lambda(y)=\frac{\mathbb{E}\xi_1e^{\langle\xi_1,y\rangle}}{\mathbb{E}e^{\langle\xi_1,y\rangle}}.
$$

根据定理 1.4, 即得欲证的 LDP. ∎

注 1.6 上面的定理如假设 $\exists\delta>0$ 使

$$
\mathbb{E}e^{\delta\|\xi_1\|}<+\infty \tag{1.11}
$$

仍成立. 事实上， Bahadur 和 Zabell(1979) 证明了 $\{\mathbb{P}(S_n/n\in\cdot),n\to+\infty\}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上恒满足速率函数为 Λ^* 的 w-LDP($\Longleftrightarrow$ w*-LDP, 因 $\mathbb{R}^d$ 局部紧), 而条件 (1.11) 保证了 LUD(据命题 1.1). 参看第三章.

1.3B 中偏差

设 $\lambda(n)>0$ 是一单调上升序列，满足

$$
\lambda(n)\to+\infty,\ \lambda(n)/\sqrt{n}\to 0.
$$

令 $\epsilon=\epsilon(n)=\frac{1}{\lambda^2(n)}$, 则

$$
\mu_\epsilon(n)\hat{=}\mathbb{P}\Big(\frac{S_n-np}{\sqrt{n}\lambda(n)}\in\cdot\Big),\ p=\mathbb{E}\xi_1
$$

就变成了引论中的所谓中偏差估计.

以下假设 (1.9).$(\mu_{\epsilon(n)}, n\to+\infty)$ 的 Cramér 泛函为

$$
\begin{aligned}
P(y) &\hat{=} \lim_{n\to\infty}\epsilon(n)\log\int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle x,y\rangle/\epsilon(n)}d\mu_{\epsilon(n)}(x)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda^2(n)}\log \mathbb{E}\exp\left[\left\langle\frac{S_n-np}{\lambda(n)\sqrt{n}},y\right\rangle\lambda^2(n)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda^2(n)}\log\left[\mathbb{E}\exp\left(\frac{\langle\xi_1-p,y\rangle}{\sqrt{n}}\lambda(n)\right)\right]^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda^2(n)}\left[\Lambda\left(\frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}}y\right)-\frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}}\langle p,y\rangle\right],
\end{aligned}
$$

其中

$$
\Lambda(y)=\log\mathbb{E}e^{\langle\xi_1,y\rangle}
$$

(如 (1.10a)). 令

$$
f(t)=\Lambda(ty).
$$

根据控制收敛定理有：对 $|t|$ 充分小，

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{\mathbb{E}\langle\xi_1,y\rangle e^{\langle\xi_1,ty\rangle}}{\mathbb{E}\exp\langle\xi_1,ty\rangle},\ f'(0)=\langle p,y\rangle,\\
f''(t) &= \frac{\mathbb{E}\langle\xi_1,y\rangle^2 e^{\langle\xi_1,ty\rangle}-\left(\mathbb{E}\langle\xi_1,y\rangle e^{\langle\xi_1,ty\rangle}\right)^2}{\left(\mathbb{E}\exp\langle\xi_1,ty\rangle\right)^2},\\
f''(0) &= \mathbb{E}(\langle\xi_1-p,y\rangle)^2=\langle y,\sigma y\rangle,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\sigma=(\sigma_{ij})_{d\times d},\ \sigma_{ij}=\mathbb{E}(\xi_1^i-p^i)\xi_1^j-p^j)
$$

是协方差阵．因此，据 Taylor 公式，

$$
\begin{aligned}
P(y) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}})^2}\left[f\left(\frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}}\right)-f'(0)\frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}}\right]\\
&= \frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}\langle y,\sigma y\rangle. \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

它的 Legendre 变换为

$$I(x)=\sup(\langle x,y\rangle-\frac{1}{2}\langle y,\sigma y\rangle \mid y\in \mathbb{R}^d)$$
$$=\begin{cases} \frac{1}{2}\langle x,\sigma^{-1}x\rangle, & 若 x\in \mathrm{Ran}(\sigma), \\ +\infty, & 否则, \end{cases} \tag{1.13}$$

其中 $\sigma^{-1}x$ 是 $\{y\in \mathbb{R}^d \mid \sigma y=x\}$ 中长度最短的向量. 这样我们就得到了

命题 1.7 在 (1.11) 条件下,

$$\mathbb{P}(\frac{S_n-np}{\sqrt{n}\lambda(n)}\in\cdot),\ n\to\infty$$

在 $\mathbb{R}^d$ 上满足速率函数为由 (1.13) 定义的 $I(x)$, 速度为 $\frac{1}{\lambda^2(n)}$ 的 LDP.

习 题

习题 1.8 设 $\Lambda_\alpha(t)=\log\int_{\mathbb{R}}^{tx}\alpha(dx)$, Λ_α^* 是 Λ_α 的 Legendre 变换. 在下述各种情形计算 Λ_α 和 Λ_α^*.

a) $\alpha=\lambda\delta_a+(1-\lambda)\delta_b$, 其中 $a<b,\lambda\in(0,1)$.

$$\Lambda_\alpha^*(x)=\begin{cases} \frac{x-a}{b-a}\log\frac{x-a}{(1-\lambda)(b-a)}+\frac{b-x}{b-a}\log\frac{b-x}{\lambda(b-a)}, & x\in[a,b], \\ +\infty, & 否则. \end{cases}$$

b) $\alpha=N(m,\sigma^2)$(均值为 $m\in\mathbb{R}$, 方差为 $\sigma^2>0$).

c) $\alpha(dx)=1_{[0,+\infty)}\lambda e^{-\lambda x}$(参数为 λ 的指数分布).

d) $\alpha(dx)=\sum_{k\in\mathbb{N}}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k$(密度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 分布).

习题 1.9 考虑指数分布族 $\mu_\lambda(dx)=1_{[0,+\infty)}\lambda e^{-\lambda x}dx,\lambda>0$.

a) 利用第一章习题 1.11 直接说明 $(\mu_\lambda,\lambda\to+\infty)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足速度为 $\frac{1}{\lambda}$, 速率函数为

$$I(x)=\begin{cases} x, & 若 x\geq 0, \\ +\infty, & 若 <0 \end{cases}$$

的 LDP.

b) 计算 Cramér 泛函.

c) 证明 $\Lambda^*(x) \equiv I(x)$. 说明定理 1.3 的条件 (1.7) 不成立.

习题 1.10 设 $(\xi_\lambda, \lambda > 0)$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一族 Poisson 分布随机变量, 满足

$$\mathbb{P}(\xi_\lambda = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

证明 $(\mu_\lambda = \mathbb{P}(\xi_\lambda/\lambda \in \cdot), \lambda \to +\infty)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足速度为 λ^{-1} 的大偏差原理, 找出其速率函数.

习题 1.11 设 $(\xi_i)_{i\geq 1}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一列实值 i.i.d.r.v., 分布为 α, 且满足 $\mathbb{E}|\xi_1| < +\infty$. 证明

a) $\Lambda_\alpha^*(p) = 0$, 其中 $p = E\xi_1$.

b) $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} > x) \leq e^{-n\Lambda_\alpha^*(x)}, \forall x > p$; $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} < x) \leq e^{-n\Lambda_\alpha^*(x)}, \forall x < p$.

c) 对 $\mathbb{R}$ 中的闭集 F, $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in F) \leq -\inf_F \Lambda_\alpha^*$.

d) 若 $\Lambda_\alpha^*(x) < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$ 则 $\lim_{|x|\to+\infty} \Lambda_\alpha^*(x)/|x| = +\infty$.

习题 1.12 在命题 1.1 等价性质成立的情形下, 证明

a) $[\Lambda^* = 0] = \partial\Lambda(0)$(即 Λ 在 0 点的次微分集, 见附录).

b) 若 Λ 在 0 点可导, 证明对 $p = \nabla\Lambda(0)$ 的任意开邻域 N, 有

$$u(N^c) = \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(N^c) < 0, \tag{1.14}$$

即 μ_ϵ 以指数速率趋于 δ_p.

c)* 再假定 (1.2). 证明 b) 的逆, 即若 μ_ϵ 以指数速率收敛于 δ_p, 则 Λ 在 0 点可导且 $p = \nabla\Lambda(0)$.

习题 1.13 (下述小题是独立的)

a) 验证 (1.13).

b) 设 $\lambda_i \in [0,1]$ 使 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$,$(\xi_i, i = 1, \cdots, n)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的实值随机变量. 证明

$$\log \mathbb{E}\exp\sum_{i=1}^n \lambda_i\xi_i \leq \sum_{i=1}^n n\lambda_i \mathbb{E}\exp\xi_i. \tag{1.15}$$

c) 设 ξ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的实值随机变量. 记

$$L(t) = \mathbb{E}e^{t\xi} \in (0, +\infty].$$

利用控制收敛定理证明: $\forall t \in [L < +\infty]^o$,

c.i) $\mathbb{E}|\xi|^n e^{t\xi} < +\infty, \ \forall n \in \mathbb{N}$;

c.ii) $L(t)$ 在 $[L < +\infty]^o$ 上无穷次可微, 且

$$\frac{d^n}{dt^n}L(t) = \mathbb{E}\xi^n e^{t\xi}, \ \forall t \in [L < +\infty]^o;$$

c.iii) $L(t)$ 在 $[L < +\infty]^o$ 上实解析.

习题 1.14 设 α_n, α 是 $\mathbb{R}^d$ 上概率测度, α_n 弱收敛于 α. 假定

$$\sup_{n\geq 1} \Lambda_n(y) = \sup_{n\geq 1} \log \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle x, y\rangle} d\alpha_n, \ \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

a) 证明 $\Lambda_n(y) \to \Lambda_\alpha(y)$.

b) 设 W_n 是 n 个以 α_n 为共同分布的独立随机变量之和. 证明 $\mathbb{P}(\frac{W_n}{n} \in \cdot)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上满足速率函数为 Λ_α^* 的 LDP.

习题 1.15* (Cramér 定理的不变形式) 设 $(\xi_k)_{k\geq 1}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一串独立同分布 (分布为 α) 的随机变量 (满足 (1.9)). 令

$$X_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} \xi_k \ ([\cdot]\text{表示整数部分}), t \in [0, 1],$$

它是取值于 $\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^d)$ 中的随机变量.

a) 设 $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1\}$ 是 $[0,1]$ 的一个分割.

证明 $\mathbb{P}(X_n(\Delta) = (X_n(t_0), \cdots, X_n(t_m)) \in \cdot)$ 在 $(\mathbb{R}^d)^{m+1}$ 上满足速率函数为

$$I^\Delta(x_0, x_1, \cdots, x_m) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m-1}(t_{i+1} - t_i)\Lambda_\alpha^*\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\right), & x_0 = 0, \\ +\infty, & x_0 \neq 0 \end{cases}$$

的大偏差原理.

b) $\forall \omega \in \mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^d)$, 令 $\omega(\Delta) = (\omega(t_0), \omega(t_1), \cdots, \omega(t_m))$. 证明

$$I(\omega) \doteq \sup\{I^{\Delta}(\omega(\Delta)) \mid \Delta \text{是}[0,1]\text{的分割}\} = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda_{\alpha}^*(\dot{\omega}(t))dt, & \text{若}\omega\text{绝对连续且}\omega(0)=0, \\ +\infty, & \text{否则}. \end{cases}$$

c) 证明 $\forall t \in [0,1]$ 固定,

$$\lim_{h\to 0+} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\sup_{t\le s\le t+h} \|X_n(s) - X_n(t)\| > \delta) = -\infty.$$

d) 利用第一章命题 5.6 证明 $\mathbb{P}(X_n \in \cdot)$ 在 $(\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^d)$ 上关于一致收敛拓扑满足速度为 $\frac{1}{n}$, 速度函数 I 由 b) 给出的大偏差原理.

习题 1.16*(中偏差的不变形式) 如上习题, 但考虑

$$Y_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^{[nt]}(\xi_i - p)}{\sqrt{n}\lambda(n)},\ t \in [0,1],\ p = \mathbb{E}\xi_1.$$

假定条件 (1.11) 和 ξ_1 的协方差阵 σ 可逆.

a) 对 $[0,1]$ 的分割 $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1\}$, 证明 $\mathbb{P}(Y_n(\Delta) \in \cdot)$ 在 $(\mathbb{R}^d)^{m+1}$ 上满足速率函数为

$$I^{\Delta}(x_0, \cdots, x_m) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}(t_{i+1} - t_i)\langle \frac{x_{i+1} x_i}{t_{i+1} t_i}, \sigma^{-1}\left(\frac{x_{i+1} x_i}{t_{i+1} t_i}\right)\rangle, & x_0 = 0, \\ +\infty, & x_0 \ne 0 \end{cases}$$

的 LDP(速度为 $1/\lambda(n)$).

b) 证明: $\forall \omega \in \mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^d)$,

$$I(\omega) \doteq \sum\{I^{\Delta}(\omega) \mid \Delta \text{是}[0,1]\text{的分割}\} = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 \langle \dot{\omega}(t), \sigma^{-1}\dot{\omega}(t)\rangle dt, & \text{若}\omega\text{绝对连续}, \\ +\infty, & \text{否则}. \end{cases}$$

c) 验证第一章命题 5.6 的条件 (5.9), 并且证明 $\mathbb{P}(Y_n \in \cdot)$ 在 $\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^d)$ 上关于一致收敛拓扑满足速率函数为 b) 中给出的 LDP, 速度为 $1/\lambda^2(n)$.

习题 1.17(对本性一致或点态大偏差的推广) 设 (J, α) 是测度空间, $(\mu_\epsilon^j, \epsilon > 0, j \in J)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一族概率测度. 定义本性一致 (点态)Cramér 泛函

$$\Lambda_\alpha^u(y) = \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \text{ess.sup}_{j \in J} \int_X e^{\langle x, y \rangle / \epsilon} d\mu_\epsilon^j(x), \qquad (1.16a)$$

$$\Lambda_\alpha^p(y) = \text{ess.sup}_{j \in J} \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_X e^{\langle x, y \rangle / \epsilon} d\mu_\epsilon^j(x). \qquad (1.16b)$$

假设它们 $> -\infty$. 下面的术语参见第一章习题 3.12.

a) 证明 $(\mu_\epsilon^i, \epsilon \to 0)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上恒满足速率函数为 $(\Lambda_\alpha^u)^*$(相应地, $(\Lambda_u^p)^*$) 的本质一致 (相应地, 点态)ULD.

b) 证明 (a) 中相应的本性一致 (点态)ULD 成立的充要条件是 $\text{Dom}(\Lambda_\alpha^u)(\text{Dom}\Lambda_\alpha^p)$ 为 $0 \in \mathbb{R}^d$ 的邻域.

c) 假设 $\forall y \in \mathbb{R}^d$, 下列条件之一成立:

$$\Lambda_\alpha^u(y) = \limsup_{\epsilon} \epsilon \log \text{ess.inf}_{j \in J} \int_X e^{\langle x, y \rangle / \epsilon} d\mu_\epsilon^j(x); \qquad (1.17a)$$

$$\Lambda_\alpha^p(y) = \text{ess.inf}_{j \in j} \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_X e^{\langle x, y \rangle / \epsilon} d\mu_\epsilon^j(x), \qquad (1.17b)$$

则引理 1.2 对本性一致或点态 LLD 成立. 若 Λ_α^u(或 Λ_α^p) 本性光滑, 证明 $(\mu_\epsilon^i, \epsilon \to 0)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上满足本性一致 (或点态)LDP.

§ 2. 无限维弱拓扑情形

现在回到 §0 的一般框架, 且设 $\dim X = +\infty$.

此节的结果是本篇的关键部分之一, 它们的各种特殊情形将在 §3 中讨论.

2.1 上界 (ULD)

首先介绍与凸分析中 Moreau 定理 (见附录) 紧密相连的 Y 上的 Mackey 拓扑，它是 Y 中所有满足

$$(Y,\sigma)' = X$$

的局部凸 Hausdorff 拓扑 σ 中最强的拓扑，记作 $\tau(Y,X)$.

Mackey 定理 $\tau(Y,X)$ 与在 X 中对称凸且 $\sigma(X,Y)$- 紧的那些集上一致收敛的拓扑相同 (见 [Sc1],p.131, 或 [Bo], p.69–71).

下面是本节的主要结果：

定理 2.1 设 Λ 在 $0 \in Y$ 关于 $\tau(Y,X)$ 的某个邻域上有限 (即 $[\Lambda < +\infty]$ 是点 0 的 $\tau(Y,X)$- 邻域). 则下述性质等价：

(i) $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(X, \sigma(X,Y))$ 上满足速率函数为 Λ_Y^* 的 ULD;

(ii) Λ 在 $0 \in Y$ 点关于 $\tau(Y,X)$- 连续;

(ii)$'$ Λ 在 $0 \in Y$ 点的一个 $\tau(Y,X)$- 邻域 N 上有上界;

(iii) 记 Y^* 为 Y 上的所有 线性泛函 组成的 代数对偶空间. $\forall x^* \in Y^*$, 若

$$\overline{\Lambda}^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, y\rangle - \Lambda(y) \mid y \in Y\} < +\infty,$$

则 $x^* \in X$.

注 "性质 (iii)⇒ULD" 是由 Dawson-Gärtner(1987) 在 $[\Lambda < +\infty] = X$ 情形下得到的. 我们将称之为 Dawson-Gärtner 条件.

在证明之前，我们先讨论

2.1A 一个特殊情形：投影极限方法

设 Y^* 是 Y 上所有线性型组成的代数对偶空间，并赋予其 σ-域 $\mathcal{B}_Y(Y^*) = \sigma(\langle\cdot, y\rangle \mid y \in Y)$. 因 $X \subset Y^*$, $\mathcal{B}_Y(Y^*) \cap X \subset \mathcal{B}_Y(X)$, 从而可将 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 看成是 Y^* 上的概率测度族.

我们将用投影极限方法证明关键的

引理 2.2 若

$$\forall y \in Y, \exists \delta > 0, 使 \Lambda(\delta y) < +\infty, \tag{2.1}$$

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ 上满足速率函数为 $\overline{\Lambda}^*$ 的 ULD.

证明 记 $\mathcal{V}$ 为 Y 中所有有限维线性子空间组成的族. $\mathcal{V}$ 关于 "$\subset$" 构成偏序集. 固定 $V \in \mathcal{V}$, 在 Y^* 上定义等价关系:

$$x_1^* \stackrel{V}{\longleftrightarrow} x_2^* \text{ 当且仅当} \langle x_1^*, y\rangle = \langle x_2^*, y\rangle, \forall y \in V.$$

对 $x^* \in Y^*$, 记 $[x^*]_V = \{x_1^* \in Y^* \mid x_1^* \stackrel{V}{\longleftrightarrow} x^*\}$, 即 x^* 的等价类. 令

$$V^* \hat{=} Y^*/\underset{\longleftrightarrow}{V} (\text{商空间}) = \{[x^*]_V \mid x^* \in Y^*\},$$

那么关于双线性型 $\langle [x^*], y\rangle \hat{=} \langle x^*, y\rangle$, V^* 与 V 互为 (代数) 对偶, 且 $\dim V^* = \dim V < +\infty$. 定义

$$P_V : Y^* \longrightarrow V^*, \quad x^* \longmapsto [x^*] (\text{自然映射}),$$
$$\mu_\epsilon^V \hat{=} \mu_\epsilon \circ P_V^{-1}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

类似定义 Cramér 泛函

$$\Lambda_V(y) \hat{=} \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_{V^*} e^{\langle z, y\rangle/\epsilon} d\mu_\epsilon^V(z) = \Lambda(y), \; y \in V \tag{2.2a}$$

及它的 Legendre 变换

$$\begin{aligned}\Lambda_V^*(P_V(x^*)) &\hat{=} \sup\{\langle p_V(x^*), y\rangle - \Lambda_V(y) \mid y \in V\} \\ &= \sup\{\langle x^*, y\rangle - \Lambda(y) \mid y \in V\},\end{aligned} \tag{2.2b}$$

显然有

$$\overline{\Lambda}^*(x^*) = \sup\{\Lambda_V^*(P_V(x^*)) \mid v \in \mathcal{V}\}. \tag{2.3}$$

对 $V, W \in \mathcal{V}$, 若 $V \subset W$, 考虑

$$P_{WV} : W^* \longrightarrow V^*, \; [x^*]_W \longmapsto [z^*]_V.$$

因此依照第一章 §5.3, 可定义投影极限空间 p-$\lim(V^*; V \in \mathcal{V})$. 易证如下事实:

$$(Y^*, \sigma(Y^*, Y)) \text{与} p\text{-}\lim(V^*, V \in \mathcal{V}) \text{拓扑同胚}. \tag{2.4}$$

(同胚映照为 $x^* \longrightarrow ([x^*]_V)_{V \in \mathcal{V}}$.)

有了这些准备, 下面来证此引理. 若 (2.1) 成立, 据命题 1.1, $(\mu_\epsilon^V, \epsilon \to 0)$ 在 V^* 上满足速率函数为 Λ_V^* 的 ULD. 应用第一章命题 5.8 和 (2.4),$(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ 上满足速率函数为

$$\sup\{\Lambda_V^*(p_V(x^*)) \mid V \in \mathcal{V}\} = \overline{\Lambda}^*(x^*) \ (\text{据}(2.3))$$

的 ULD. ∎

注　参照有限维命题 1.1 的等价性证明, 类似可证条件 (2.1) 亦是必要的.

2.1B　定理 2.1 的证明

(iii)⇒(i). 它是引理 2.2 的直接推论.

(ii)⇔(ii)′. 见附录 (A.6).

(i)⇒(ii). 依假设, DomΛ 在 $(Y, \tau(Y, X))$ 中拓扑内集 $(\text{Dom}\Lambda)^{o\tau}$ 非空. 而对任意 $y \in (\text{Dom}\Lambda)^{o\tau}$, 可应用 Laplace 原理 (定理 I.2.4) 得

$$\Lambda(y) \le \sup\left(\langle x, y\rangle - \Lambda_Y^*(x) \mid x \in X\right) = \Lambda_Y^{**}(y) \le \Lambda(y), \tag{2.5}$$

因 Λ_Y^* 关于 $\sigma(X, Y)$ 下紧, 将 Moreau 定理 (A.9) 应用于空间 $(Y, \sigma(Y, X))$, 得知 Λ_Y^{**} 在 $0 \in Y$ 关于 $\tau(Y, X)$ 拓扑连续, 从而由 "$\Lambda|_{(\text{Dom}\Lambda)^{o\tau}} = \Lambda_Y^{**}|_{(\text{Dom}\Lambda)^{o\tau}}$(据 (2.5))" 这一事实推出 Λ 在 $0 \in Y$ 关于 $\tau(Y, X)$ 的连续性.

(ii)⇒(iii). 定义

$$\widetilde{\Lambda}^*(x^*) = \begin{cases} \Lambda_Y^*(x^*), & \text{若} x^* \in X, \\ +\infty, & \text{否则}. \end{cases} \tag{2.6a}$$

(iii) 可陈述为

$$在Y^*上有\overline{\Lambda}^* = \widetilde{\Lambda}^*. \tag{2.6b}$$

为证 (2.6b), 先注意到由 Λ 在 $0\in Y$ 关于 $\tau(Y.X)$ 的连续性推出 Λ 在 $(\mathrm{Dom}\Lambda)^{o\tau}$ 上连续. 据 Fenchel-Legendre 定理 (A.8), 有

$$\begin{aligned}\Lambda^{\Gamma}(y) &= \Lambda_Y^{**}(y) \triangleq \sup\left(\langle x, y\rangle - \Lambda_Y^*(x) \mid x\in X\right)\\ &= \sup\left(\langle x^*, y\rangle - \widetilde{\Lambda}^*(x^*) \mid x^*\in Y^*\right),\ \forall y\in Y\end{aligned} \tag{2.7a}$$

和

$$\Lambda^{\Gamma}(y) = \begin{cases}\Lambda(y), & 若\in (\mathrm{Dom}\Lambda)^{o\tau},\\ +\infty, & 若y\notin \overline{\mathrm{Dom}\Lambda}^{\tau}.\end{cases} \tag{2.7b}$$

(这一结果显然, 因 Λ 在 $(\mathrm{Dom}\Lambda)^{o\tau}$ 上连续.) 从而 $\sigma(Y,X)$- 下半连续凸函数 Λ^{Γ} 在 $0\in Y$ 关于 $\tau(Y,X)$ 连续. 据 Moreau 定理, Λ_Y^* 在 $(Y,\sigma(Y,X))$ 上下紧, 从而 $\widetilde{\Lambda}^*$ 在 $(Y^*,\sigma(Y^*,Y))$ 上下紧.

将 Fenchel-Legendre 定理 (A.8) 应用于 (2.7a), 则由 (2.7b) 得

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}^*(x^*) &= \sup\left(\langle x^*, y\rangle - \Lambda^{\Gamma}(y) \mid y\in Y\right)\\ &= \sup\left(\langle x^*, y\rangle - \Lambda^{\Gamma}(y) \mid y\in \overline{\mathrm{Dom}\Lambda}^{\tau}\right).\end{aligned}$$

而对 $y\in\overline{\mathrm{Dom}\Lambda}^{\tau}$, 因 $(\mathrm{Dom}\Lambda)^{o\tau}$ 非空, $\forall\lambda\in[0,1)$, 有

$$\lambda y\in(\mathrm{Dom}\Lambda)^{o\tau} = \mathrm{ri}(\mathrm{Dom}\Lambda)\ (据(A.5)).$$

又由 $\lambda\longmapsto\Lambda^{\Gamma}(\lambda y)$ 的凸性, 有如下初等事实:

$$\lim_{\lambda\to 1}\Lambda^{\Gamma}(\lambda y)\le\Lambda^{\Gamma}(y),$$

从而 $\forall x^*\in X^*$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}(x^*) &= \sup\left(\langle x^*, y\rangle - \Lambda^{\Gamma}(y) \mid y\in\overline{\mathrm{Dom}\Lambda}^{\tau}\right)\\ &= \sup\left(\langle x^*, y\rangle - \Lambda^{\Gamma}(y) \mid y\in(\mathrm{Dom}\Lambda)^{o\tau}\right)\\ &= \sup\left(\langle x^*, y\rangle - \Lambda(y) \mid y\in(\mathrm{Dom}\Lambda)^{o\tau}\right)\\ &= \sup\left(\langle x^*, y\rangle - \Lambda(y) \mid y\in\mathrm{ri}(\mathrm{Dom}\Lambda)^{o\tau}\right),\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 (2.7b) 推得. 最后，由于 $\tau(Y,X)$ 比 $\tau(Y,Y^*)$ 弱 (依定义), Λ 在 $0\in Y$ 关于 $\tau(Y,Y^*)$ 也连续. 类似以上证明，就得到， $\forall x^*\in X^*$,

$$\overline{\Lambda}^*(x^*)=\sup\{\langle x^*,y\rangle-\Lambda(y)\mid y\in \mathrm{ri}(\mathrm{Dom}\Lambda)\}.$$

所以 (2.6b) 得证. ∎

注 据 Moreau 定理，若 Λ 在 $(Y,\sigma(Y,X))$ 上下半连续，则定理 2.1(ii) 等价于如下条件： Λ_Y^* 在 $(X,\sigma(X,Y))$ 上下紧. 但若不假设 Λ 关于 $\sigma(Y,X)$ 下半连续，可构造反例说明上述条件不能推出定理 2.1(i) 中的 ULD(见 [W2]).

2.1C 弱 *- 拓扑情形

命题 2.5 设 Y 是一局部凸可度量完备的实向量空间. 设 $(\mu_\epsilon,\epsilon>0)$ 是 Y 的拓扑对偶空间 $(Y',\sigma(Y',Y))$ 上的一族概率测度.

(a) 若 Λ 在 $0\in Y$ 的一个自身拓扑邻域上有上界, 则 $(\mu_\epsilon,\epsilon\to 0)$ 在 $(Y',\sigma(Y',Y))$ 上满足速率函数为 Λ_Y^* 的 ULD.

(b) 设 Λ 在 $0\in Y$ 的一个自身拓扑开邻域 N 上下半连续. 若 Λ 满足 (2.1) , 则 $(\mu_\epsilon,\epsilon\to 0)$ 在 $(Y',\sigma(Y',Y))$ 上满足速率函数为 Λ_Y^* 的 ULD.

证明 (a) 据 Bourbaki([Bo],p.71), 对一个局部凸可度量的实向量空间 Y, $\tau(Y,Y')$ 与 Y 的自身拓扑相同. 所以 (a) 是定理 2.1 的直接推论.

(b) 设 Λ^Γ 是 Λ 关于 Y 的自身拓扑的下半连续修正. 据 (b) 的假设有 $\Lambda^\Gamma|_N=\Lambda|_N$. 考虑

$$A=\{y\in Y|\,\Lambda^\Gamma(\pm y)\le 1\},$$

显然 A 是凸的，对称的，闭的. 据条件 (2.1), 又有

$$Y\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} nA. \tag{2.8}$$

据 Baire 纲性定理，关于 Y 的拓扑假设保证了：存在 $n \geq 1$，使 $(nA)^o$ 非空，因此 A^o 非空．而显然 $0 \in A^o$，所以 $A^o \cap N$ 是 $0 \in Y$ 的开邻域．由于

$$\Lambda^{\Gamma}\big|_{A^o \cap N} = \Lambda\big|_{A^o \cap N} \leq 1,$$

应用 (a) 即得 ULD. ∎

2.1D $\mathrm{Dom}\Lambda_Y^*$ 与 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 支撑集的关系

回忆 μ_ϵ 在 $(X, \sigma(X,Y))$ 中的 (拓扑) 支撑集为

$$\mathrm{supp}(\mu_\epsilon) = \bigcap\{F \mid F\text{是}\sigma(X,Y)\text{闭、}\mathcal{A}\text{- 可测，且}\mu_\epsilon(F) = 1\}.$$

记 $\mathrm{cl}(\mathrm{supp}(\mu_\epsilon))$ 为包含 $\mathrm{supp}(\mu_\epsilon)$ 的最小凸 $\sigma(X,Y)$- 闭集.

命题 2.6 若 $(X, \sigma(X,Y))$ 中的凸闭子集 K 满足

$$K \supset \mathrm{cl}(\mathrm{supp}(\mu_\epsilon)). \quad \forall \epsilon > 0,$$

则

$$\Lambda_y^*(x) = +\infty, \quad \forall x \notin K. \tag{2.9}$$

证明 $\forall \delta > 0$，集 $A \doteq \{x \in X \mid \langle x, y \rangle \leq \sup_K \langle \cdot, y \rangle + \delta\}$ 是闭的，$\mathcal{A}$- 可测，且 $\mu_\epsilon(A) = 1$. 因此

$$\int_X e^{\langle x,y \rangle/\epsilon} d\mu_\epsilon(x) \leq \int_A e^{\langle x,y \rangle/\epsilon} d\mu_\epsilon(x) \leq \exp[\sup_{x \in K} \langle x, y \rangle/\epsilon]. \tag{2.10}$$

从而

$$\begin{aligned}\Lambda(y) &\leq \sup_{x \in K} \langle x, y \rangle \\ &= \sup\big(\langle x, y \rangle - \psi_K(x) \mid x \in X\big) = \psi_K^*(y),\end{aligned}$$

其中

$$\psi_K(x) = \begin{cases} 0, & \text{若}x \in K, \\ +\infty, & \text{否则} \end{cases}$$

是凸、下半连续的. 依 Fenchel-Legendre 定理,

$$\Lambda_Y^* \geq (\psi_K^*)^* = \psi_K.$$

命题得证. ∎

2.2 下界

定理 2.7 假设 $\forall y \in Y$,

$$\Lambda(y) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_X e^{\langle x, y\rangle/\epsilon} d\mu_\epsilon(x) \in (-\infty, +\infty]$$

存在且满足 (2.1). 若下述条件之一被满足:

(i) Λ 在全空间 Y 上有限且 Gateaux- 可导,

(ii) 对 Y 的任意有限维子空间 V, $\Lambda|_V$ 本性光滑,

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(X, \sigma(X, Y))$ 上满足速率函数为 Λ_Y^* 的 LLD. 此时, 若定理 2.1 的等条件之一被满足, 就有相应的 LDP.

证明 对 Y 的任意有限维子空间 V, 据定理 2.4, 引理 2.2 证明中的有限维边缘分布 $(\mu_\epsilon^V, \epsilon \to 0)$ 在 V^* 上满足速率函数为 Λ_V^* 的 LLD. 据第一章命题 5.8,$(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ 上满足速率函数为 $\overline{\Lambda}^*$ 的 LLD.

由于 $(X, \sigma(X, Y))$ 是 $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ 的拓扑子空间, 于是对任一 $(X, \sigma(X, Y))$ 的开集 $G \in \mathcal{B}_Y(X)$, 存在开集 $\widetilde{G} \in \mathcal{B}_Y(Y^*)$, 使 $G = \widetilde{G} \cap X$. 从而

$$\begin{aligned} l(G) &= \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(G) = \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(\widetilde{G}) \\ &\geq -\inf_{\widetilde{G}} \overline{\Lambda}^* \geq -\inf_G \Lambda^*. \end{aligned}$$ ∎

习 题

习题 2.8 设 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 是 $X = (Y', \sigma(Y', Y))$ 上的一族概率测度 (σ- 域为 $\mathcal{B}_Y(Y')$), 其中 Y 为 Banach 空间. 若 $\exists \delta > 0$, 使得

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_X e^{\delta \|x\|/\epsilon} d\mu_\epsilon(x) < +\infty,$$

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(Y', \sigma(Y', Y))$ 上满足速率函数为 λ_Y^* 的 ULD.

习题 2.9 用 Mackey 定理证明凸函数 $\Lambda : Y \to (-\infty, +\infty]$ $(\Lambda(0) = 0)$ 在 0 点关于 $\tau(Y, X)$ 连续的充要条件是：存在 X 的凸、对称、$\sigma(X, Y)$- 紧集 K, 使

$$\Lambda(y) \le 1,\ \forall y \in^o K = \{y' \in Y \mid \sup_{x \in K} \langle x, y' \rangle \le 1\}.$$

(^oK 称为 K 的极集.)

习题 2.10 设 $(\xi_n)_{b \ge 1}$ 是取值于可分 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 的 i.i.d.r.v., 分布为 α. 记 $\Lambda_\alpha(y) = \log \int_X e^{\langle x, y \rangle} \alpha(dx)$, $\forall y \in Y \doteq X'$. 假设 $\Lambda_\alpha < +\infty$(在全空间 Y 上).

(a) 证明 $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in \cdot)$ 在 $(X, \sigma(X, X'))$ 上恒满足速率函数为 Λ_Y^* 的 w*-LDP.

(b) 若 X 是自反空间 (即 $X = X''$), 则 (a) 中相应的 LDP 成立 (提示：利用定理 2.5(b)).

(c) 设 $\lambda(n) \to +\infty, \lambda(n)/\sqrt{n} \to 0$, 且还有 $\mathbb{E}\|\xi_1\|^2 < +\infty$. 证明 $P(\frac{S_n - np}{\sqrt{n}\lambda(n)} \in \cdot)$ 在 $(X, \sigma(X, X'))$ 上满足速率函数为

$$I(x) \doteq \sup\left(\langle x, y \rangle - \frac{1}{2}\mathbb{E}(\langle \xi_1 - p, y \rangle)^2 \mid y \in X'\right)$$

的 LDP(速度为 $1/\lambda^2(n)$).

习题 2.11(续习题 1.17) 设 (J, α) 是测度空间, $(\mu_\epsilon^j, j \in j, \epsilon > 0)$ 是 $(X, \mathcal{B}_Y(X))$ 上的一族概率测度. 类似 (1.16a,b) 定义本性一致或点态 Cramér 泛函. 假设 Λ_α^u(或 Λ_α^P) 在 $0 \in (Y, \tau(Y, X))$ 的一个邻域上有限.

(a) 证明如下性质等价:

(a.i) $(\mu_\epsilon^j, \epsilon \to 0)$ 在 $(X, \sigma(X, Y))$ 上满足速率函数为 $(\Lambda_\alpha^u)_Y^*$(或 $(\Lambda_\alpha^P)_Y^*$) 的本性一致·(或点态)ULD;

(a.ii) Λ_α^u(或 Λ_α^P) 在 $0 \in Y$ 关于 $\tau(Y, X)$- 连续;

(a.iii) $\overline{(\Lambda_\alpha^u)}^*(\beta) < +\infty \Rightarrow \beta \in Y (\forall \beta \in Y^*)$.

(b) 再假设 (1.17a)(或 (1.17b)), 若 Λ_α^u(或 Λ_α^p) 在 Y 的任意有限维子空间上本性光滑, 则 $(\mu_\epsilon^j, \epsilon \to 0)$ 在 $(X, \sigma(X, Y))$ 满足速率函数为 Λ_Y^* 的 LDP.

§ 3. 几种特殊情形

首先引入记号:

E 是波兰空间, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$;

$M_b(E)$ $\big(M_1(E)\big) = \{\mu \mid \mu$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上有界变差 (概率) 测度 $\}$;

$C_b(E) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ 有界连续$\}$;

$b\mathcal{E} = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$有界$\mathcal{E}$- 可测$\}$;

$\langle \beta, f \rangle = \int_E f d\beta$, 若$f \in b\mathcal{E}, \beta \in M_b(E)$;

弱收敛拓扑 $\sigma\big(M_b(E), C_b(E)\big)$, 记作 "$\xrightarrow{w}$";

$\sigma\big(M_b(E), b\mathcal{E}\big)$ 称为 τ- 拓扑, 记作 "τ".

$(M_b(E), \xrightarrow{w})$ 一般是不可度量的, 但 $(M_1(E), \xrightarrow{w})$ 是波兰空间. 而 $(M_1(E), \tau)$ 又一般是不可度量的.

设 $(\beta_n) \subset M_1(E)$, 则 $\beta_n \xrightarrow{\tau} \beta_\infty$ 当且仅当 $\forall Z \in \mathcal{E}$,

$$\beta_n(A) \longrightarrow \beta(A),$$

它比 "$\xrightarrow{w}$" 强得多.

3.1 $M_1(E)$ 上的弱收敛拓扑情形

记 $\mathcal{B}_w = \sigma\big(\langle \cdot, f \rangle \mid f \in C_b(E)\big)$ 是 $M_b(E)$ 或 $M_1(E)$ 上由 "$\xrightarrow{w}$" 生成的 Borel σ- 域. 设 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 是 $(M_1(E), \mathcal{B}_w)$ 上的一族概率测度, 例如引论中的经验分布 $\mathbb{P}(L_t \in \cdot)$ 就属于这一类.

取 $X = (M_b(E), \xrightarrow{w}), Y = C_b(E)$, 就可应用 §0 和 §2 中的框架. 此时 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 的 Cramér 泛函为

$$\Lambda(f) = \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_{M_1(E)} e^{\langle \beta, f \rangle / \epsilon} \mu_\epsilon(d\beta), \ \forall f \in C_b(E), \qquad (3.1)$$

它是 $C_b(E)$ 上取有限值的凸函数，它的 Legendre 变换为

$$\Lambda_w^*(\beta) = \sup\left(\langle\beta, f\rangle - \Lambda(f) \mid f \in C_b(E)\right), \ \forall\beta \in M_b(E). \tag{3.2}$$

因 $M_1(E)$ 是 $(M_b(E), \xrightarrow{w})$ 的凸闭子集，据命题 2.6, 有

$$\Lambda_w^*(\beta) = +\infty, \ \forall\beta \in M_b(E)\backslash M_1(E). \tag{3.3}$$

引理 3.1 (i) 若 $f \le g(\in C_b(E))$, 则

$$\Lambda(f) \le \Lambda(g) \le \|g\|_\infty \hat{=} \sup_{x\in E} |g(x)|.$$

(ii) $\Lambda(c1_E) = c, \ \forall c \in \mathbb{R}$.
(iii) $|\Lambda(f) - \Lambda(g)| \le \|f - g\|_\infty$.
(iv) $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $\left(C_b'(E), \sigma(C_b'(E), C_b(E))\right)$ 上满足速率函数为

$$\overline{\Lambda}_w^*(\beta) = \sup\left(\langle\beta, f\rangle - \Lambda(f) \mid f \in C_b(E)\right), \ \forall\beta \in C_b'(E) \tag{3.4}$$

的 ULD. 特别地，若 E 是紧集，$(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(M_1(E), \xrightarrow{w})$ 上满足速率函数为 Λ_w^* 的 LUD.

证明 (i),(ii),(iii) 是初等的．应用命题 2.5, 即得 (iv) 的第一部分．至于其第二部分，当 E 紧时，则由著名的 Riesz 定理知, $C_b'(E) = M_b(E)$. 据 (3.3), 就得所需结论. ∎

下面是著名的

引理 3.2(Daniel-Stone 定理，参见 [Y]) 设 β 是 $C_b(E)$(相应地，$b\mathcal{E}$) 上的正线性泛函 (即 $f \ge 0$ 蕴含 $\beta(f) \ge 0$). 则下述性质等价:

(i) 存在非负的测度 $\nu \in M_b(E)$, 使 $\beta(f) = \int_E f d\nu, \forall f \in C_b(E)$ (相应地，$\forall f \in b\mathcal{E}$);

(ii) 对于 $C_b(E)$(相应地，$b\mathcal{E}$) 中的任意单调下降，点点收敛于零的序列 (f_n), 有 $\beta(f_n) \to 0(n \to \infty)$.

现在可以介绍此小节的主要结果.

定理 3.3 设 E 是波兰空间, $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0))$ 是 $(M_1(E), \mathcal{B}(M_1(E))$ 上的一族概率测度. 下述性质等价:

(i) $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(M_1(E), \xrightarrow{w})$ 上满足速率函数为 Λ_w^* 的 ULD;

(ii) Λ 关于 Mackey 拓扑 $\tau\big(C_b(E), M_b(E)\big)$ 连续, 或等价地, 在 $0 \in C_b(E)$ 关于 $\tau\big(C_b(E), M_b(E)\big)$ 的一个邻域上有上界;

(iii) $\forall (f_n) \subset C_b(E)$ 满足 $f_n(x) \downarrow 0, \forall x \in E$, 有

$$\Lambda(f_n) \to 0 \ (n \to +\infty).$$

证明 (i)$\Leftrightarrow$(ii). 定理 2.1 的直接应用.

(i)$\Rightarrow$(iii). 据 Laplace 原理,

$$0 \le \Lambda(f_n) = \sup\big(\langle f_n, \beta\rangle - \Lambda_w^*(\beta) \mid \beta \in M_1(E)\big).$$

而且 $F_n(\beta) = -\langle f_n, \beta\rangle + \Lambda_w^*(\beta)$ 是下紧的 (据 Gibbs 原理), 所以依命题 I.1.2(b), 有

$$\begin{aligned} 0 \le \inf_{n\ge 1} \Lambda(f_n) &= -\sup_{n\ge 1} \inf_{M_1(E)} F_n(\beta) \\ &= -\inf_{M_1(E)} \sup_{n\ge 1} F_n(\beta) \\ &= -\inf_{M_1(E)} \Lambda_w^*(\beta) \\ &= 0 \quad (\text{因}[\Lambda_w^* = 0]\text{非空}), \end{aligned}$$

即 $\Lambda(f_n)$ 单调下降于零.

(iii)$\Rightarrow$(i). 据定理 2.1, 仅需证: 若 $C_b(E)$ 上的线性泛函 β 满足

$$\overline{\Lambda}_w^*(\beta) = \sup\big(\beta(f) - \Lambda(f) \mid f \in C_b(E)\big) < +\infty, \tag{3.5}$$

则 $\beta \in M_1(E)$. 先注意到

$$\mathbb{A} = \{\beta \in C_b^*(E)(\text{代数对偶空间}) \mid \forall f \ge 0, \beta(f) \ge 0, \beta(1_E) = 1\}$$

是凸集，关于 $\sigma(C_b^*(E), C_b(E))$ 闭的. 依命题 2.6,(3.5) 蕴含 $\beta \in \mathbb{A}$. 而对任意点点单调下降于零的序列 $(f_n)_{n\geq 1} \subset C_b(E)$, 有

$$\begin{aligned} +\infty > \overline{\Lambda}^*(\beta) &= \sup\left(\lambda\beta(f_n) - \Lambda(\lambda f_n) \mid n \geq 1, \lambda > 0\right) \\ &\geq \sup_{\lambda>0} \limsup_{n\to+\infty} \left(\lambda\beta(f_n) - \Lambda(\lambda f_n)\right) \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda \limsup_{n\to\infty} \beta(f_n) \quad (\text{据性质 (iii)}). \end{aligned}$$

因 $\beta \in \mathbb{A}$ 蕴含 $\beta(f_n) \geq 0, \forall n \geq 1$, 所以由上式得出

$$\beta(f_n) \to 0 \ (n \to +\infty).$$

根据 Daniel-Stone 定理 (引理 3.2), $\beta \in M_1(E)$. ∎

下面的命题很实用.

命题 3.4 若存在下紧函数 $\Phi : E \longrightarrow [0, +\infty]$, 使

$$\Lambda(\Phi) \hat{=} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_{M_1(E)} \exp\left[\left(\int_E \Phi d\beta\right)/\epsilon\right] \mu_\epsilon(d\beta) < \infty, \quad (3.6)$$

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(M_1(E), \xrightarrow{w})$ 上满足速率函数为 Λ_w^* 的 LUD.

证明 依命题 0.2 和第一章定理 3.2, 仅需证指数胎紧性. 而依 Prohorov 定理, $\forall L \geq 0$,

$$K_L = \left\{\beta \in M_1(E) \mid \int_E \Phi d\beta \leq L\right\}$$

是 $(M_1(E), \xrightarrow{w})$ 中的紧集. 而

$$\begin{aligned} u(K_L^c) &\hat{=} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(K_L^c) \\ &\leq \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_{K_L^c} \exp\left[\left(\int_E \Phi d\beta - L\right)/\epsilon\right] d\mu_\epsilon(\beta) \\ &\leq -L + \Lambda(\Phi). \end{aligned}$$

指数胎紧得证. ∎

据定理 3.3 和定理 2.7, 有

推论 3.5 设

$$\Lambda(f)=\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\log\int_{M_1(E)}\exp(\langle\beta,f\rangle/\epsilon)d\mu_\epsilon(\beta) \tag{3.7}$$

存在且在 $C_b(E)$ 上 Gateaux- 可导, 并满足定理 3.3 的 (ii) 或 (iii), 则 $(\mu_\epsilon,\epsilon\to 0)$ 在 $(M_1(E),\xrightarrow{w})$ 上满足速率函数为 Λ_w^* 的 LDP.

3.2 τ- 拓扑情形

在 $M_b(E)$ 或 $M_1(E)$ 中取 σ- 域

$$\mathcal{B}_\tau=\sigma\big(\langle\cdot,f\rangle\mid f\in b\mathcal{E}\big).$$

则 $\mathcal{B}_w\subset\mathcal{B}_\tau$, 但等式一般不成立. 设 $(\mu_\epsilon,\epsilon>0)$ 是 $(M_1(E),\mathcal{B}_\tau)$ 上的一族概率测度. 取 $X=\big(M_b(E),\tau\big)$,$Y=b\mathcal{E}$, 同样定义 Cramér 泛函 $\Lambda(f)$. 类似有

定理 3.6 下述性质等价:

(i) $(\mu_\epsilon,\epsilon\to 0)$ 在 $(M_1(E),\tau)$ 上满足速率函数为

$$\Lambda_\tau^*(\beta)\hat{=}\sup\big(\langle\beta,f\rangle-\Lambda(f)\mid f\in b\mathcal{E}\big)$$

的 ULD;

(ii) Λ 在 $0\in b\mathcal{E}$ 的一个关于 Mackey 拓扑 $\tau(b\mathcal{E},M_b(E))$ 的邻域上上有界;

(iii) $\forall(f_n)\subset b\mathcal{E}:f_n(x)\downarrow 0,\forall x\in E$, 有 $\Lambda(f_n)\to 0(n\to\infty)$.

若上述之一成立, 则 $\Lambda_\tau^*(\beta)=\Lambda_w^*(\beta),\forall\beta\in M_1(E)$.

证明 性质 (i),(ii),(iii) 的等价性同定理 3.3. 至于最后一个结论, 因为定理 3.3 的等价条件此时也满足, 所以有

$$\Lambda(f)=\sup\big(\langle\beta,f\rangle-\Lambda_w^*(\beta)\mid\beta\in M_b(E)\big),\ \forall f\in C_b(E).$$

而据上面的性质 (ii),Λ 在 $\big(b\mathcal{E},\tau(b\mathcal{E},M_b(E))\big)$ 上连续, 所以又有

$$\Lambda(f)=\sup\big(\langle\beta,f\rangle-\Lambda_\tau^*(\beta)\mid\beta\in M_b(E)\big),\ \forall f\in C_b(E).$$

因 Λ_w^* 和 Λ_τ^* 同时在 $(M(E), \xrightarrow{w})$ 上下紧、凸，由 Fenchel-Legendre 定理知 (A.8)$\Lambda_w^* = \Lambda_\tau^*$ 在 $M_b(E)$ 上成立. ∎

3.3 淡收敛拓扑情形

此小节设 E 是局部紧波兰空间. 记 $C_0(E)$ 为所有具紧支撑集的连续函数空间. 赋予它通常的局部凸可度量拓扑，其刻画为: $\forall (f_n) \subset C_0(E)$,

$$f_n \to 0\,(\text{在}C_0(E)\text{中}) \Longleftrightarrow \text{存在紧集}K\text{使}\forall n \geq 1,$$
$$\text{supp}(f_n) \subset K\text{且}\|f_n\|_\infty \to 0.$$

据 Riesz 表示定理， $C_0(E)$ 的拓扑对偶空间为所谓的 Radon 测度空间:

$$M_R(E) = \{\nu \mid \nu\text{是}(E, \mathcal{E})\text{上的}\sigma\text{- 有限测度},$$
$$|\nu|(K) < +\infty, \forall\text{紧}K \subset E\},$$

其中 $|\nu|$ 是 ν 的全变差测度. 且相应的对偶双线性型为

$$\langle \nu, f \rangle = \int_E f d\nu,\ \forall f \in C_0(E),\ \nu \in M_R(E).$$

令 $M_R^+(E)$ 记 E 上非负 Rodon 测度全体. 在 $M_R(E)$ 和 $M_R^+(E)$ 上赋予 σ - 域 $\mathcal{B}_R = \sigma(\langle \cdot, f \rangle \mid f \in C_0(E))$ 和所谓的 淡收敛拓扑$\sigma(M_R(E), C_0(E))$, 简记为 "$\xrightarrow{v}$".

设 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 是 $(M_R^+(E), \mathcal{B}_R)$ 上的一族概率测度. 在 §0 和 §2 的框架中取 $X = (M_R(E), \xrightarrow{v})$,$Y = C_0(E)$, 那么相应的 Cramér 泛函为: $\forall f \in C_0(E)$,

$$\Lambda(f) = \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_{M_R^+(E)} \exp(\langle \beta, f \rangle / \epsilon) \nu_\epsilon(d\beta), \tag{3.8a}$$

其 Legendre 变换为: $\forall \beta \in M_R(E)$,

$$\Lambda_R^*(\beta) = \sup\big(\langle \beta, f \rangle - \Lambda(f) \mid f \in C_0(E)\big). \tag{3.8b}$$

因 $M_R^+(E)$ 是 $(M_R(E), \xrightarrow{v})$ 的凸闭子集，有 (据命题 2.6)

$$\Lambda_R^*(\beta) = +\infty, \ \forall \beta \in M_R(E) \backslash M_R^+(E). \tag{3.9}$$

定理 3.7 若

$$\forall \text{紧} K \subset E, \exists \delta > 0, \text{使} \ \Lambda(\delta 1_K) < +\infty, \tag{3.10}$$

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(M_R^+(E), \xrightarrow{v})$ 上满足速率函数为 Λ_R^* 的 ULD.

证明 因 $C_0'(E) = M_R(E)$, 据命题 2.5, 仅需证 Λ 在 $0 \in C_0(E)$ 的一个自身邻域上有上界. 因 $C_0(E)$ 可度量, 此性质等价于：若 $f_n \to 0$(在$C_0(E)$中), 则$\overline{\lim}_{n\to\infty}\Lambda(f_n) < +\infty$. 据前所述, 存在紧集 $K \subset E$, 使 $\text{supp} f_n \subset K$, 且$\|f_n\|_\infty \to 0$ $(n \to +\infty)$. 易知 $t \to \Lambda(t 1_K)$ 是 $[0, \delta)$ 上的连续函数, 从而

$$\limsup_{n\to\infty} \Lambda(f_n) \le \lim_{n\to\infty} \Lambda(\|f_n\|_\infty 1_K) = \Lambda(0) = 0. \quad \blacksquare$$

习 题

习题 3.8 设 $\Lambda : C_b(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ 是满足

$$\forall f \le g, \ \Lambda(f) \le \Lambda(g)$$

的凸函数. 证明

(a) $\Lambda_w^*(\beta) = +\infty, \forall \beta \in M_b(E) \setminus M_b^+(E)$, 其中 $M_b^+(E)$ 为非负有限测度集. 若 Λ 还满足： $\Lambda(c 1_E) = c \, (\forall c \in \mathbb{R})$, 则 $\Lambda_w^*(\beta) = +\infty, \forall \beta \notin M_1(E)$.

(b) 利用 (A.1) 证明 Λ 关于 $\sigma\big(C_b(E), C_b^*(E)\big)$ 下半连续 (C_b^* 是代数对偶空间). 并由 (A.8) 推出

$$\Lambda(f) = \left(\overline{\Lambda}_w^*\right)^*(f) = \sup\left(\beta(f) - \overline{\Lambda}_w^*(\beta) \mid \beta \in C_b^*(E)\right),$$

其中 $\overline{\Lambda}_w^* = \sup\left(\beta(f) - \Lambda(f) \mid f \in C_b(E)\right), \forall \beta C_b^*(E)$.

(c) 证明 $\overline{\Lambda}_w^*$ 在 $C_b^*(E)$ 上下紧，且若 $\beta \in [\overline{\Lambda}_w^* < +\infty]$，则 β 是正线性型

(d) 证明如下性质等价：

(d.i) Λ 在 $C_b(E)$ 上关于 Mackey 拓扑 $\tau\big(C_b(E), M_b(E)\big)$ 连续；

(d.ii) $[\overline{\Lambda}_w^* < +\infty] \subset M_b^+(E)$；

(d.iii) $\forall [(f_n) \subset C_0(E) : f_n(x) \downarrow 0, \forall x \in E]$: $\Lambda(f_n) \to 0$.

习题 3.9 若 $\Lambda : b\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是满足

$$\forall f, g \in b\mathcal{E},\ g \leq g \Longrightarrow \lambda(f) \leq \Lambda(g)$$

的凸函数．利用习题 3.8 的次序证明如下性质等价：

(i) Λ 关于 Mackey 拓扑 $\tau(b\mathcal{E}, M_b(E))$- 连续；

(ii) 若 $\beta \in b\mathcal{E}^*$ 满足 $\overline{\Lambda}_\tau(\beta) < +\infty$，则 $\beta \in M_b^+(E)$；

(iii) $\forall [(f_n) \subset b\mathcal{E} : f_n(x) \downarrow 0, \forall x \in E] : \Lambda(f_n) \to 0$.

习题 3.10 设 α 是波兰空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的非负有界测度，$\mathbb{P}_\alpha$ 是 E 上的 Poisson 点过程分布，密度为 α，即 $\mathbb{P}_\alpha$ 是 $(M_b^+(E), \mathcal{B}_\tau)$ 上的概率测度，满足

(i) $\mathbb{P}_\alpha\big(\beta \in M_b^+(E) : \beta(A) = k\big) = e^{-\alpha(A)} \frac{\alpha(A)^k}{k!}, \forall k \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{E}$,

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{E}$，若 $A \cap B = \emptyset$，则 $\beta(A), \beta(B)$ 是 $\mathbb{P}_\alpha$- 独立的．

定义

$$\mu_\lambda(\cdot) = \mathbb{P}_{\lambda\alpha}(\lambda \cdot), \qquad \lambda > 0.$$

(a) 设 $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$，其中 $(A_i) \subset \mathcal{E}$ 互不相交．证明

$$\begin{aligned}\Lambda(f) &\doteq \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \log \int_{M_b^+(E)} e^{\langle \beta, f \rangle} d\mu_\lambda \\ &= \int_E (e^f - 1) d\alpha.\end{aligned}$$

(b) 将 (a) 中的等式推到 $f \in b\mathcal{E}$ 情形．

(c) 利用习题 3.9 和定理 2.1 和 2.7 证明 $(\mu_\lambda, \lambda \to \infty)$ 在 $(M_b^+(E), \tau)$ 上满足速率函数为

$$\Lambda_\tau^*(\beta) \doteq \sup\big(\langle \beta, f \rangle - \Lambda(f) \mid f \in b\mathcal{E}\big)$$

的大偏差原理，速度为 $1/\lambda$.

(d) 对 $\beta \in M_b^+(E)$, 证明

$$\Lambda^*(\beta) = \begin{cases} \int_E \frac{d\beta}{d\alpha} \log \frac{d\beta}{d\alpha} d\alpha - \beta(E) + \alpha(E), & \text{若} \beta << \alpha, \\ +\infty, & \text{否则}, \end{cases}$$

且 $\Lambda^*(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha$.

(e) 特别地，取 $E = [0,1], \alpha(dt) = dt$. 证明映射

$$\Phi : \beta \longrightarrow F_\beta(\cdot) = \beta([0,\cdot])$$

是从 $(M_b^+[0,1]), \tau)$ 到 $\big(D([0,1], \mathbb{R}), d_1\big)$(一致收敛拓扑) 上的连续映照.

(f) 设 $(N_t)_{t\geq 0}$ 是参数为 1, 定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的标准 Poisson 过程. 利用 (e) 的记号，有

$$\mathbb{P}\big(\frac{N_{\lambda\cdot}}{\lambda} \in A\big) = \mu_\lambda\big(\Phi^{-1}(A)\big), \forall A \subset D([0,1], \mathbb{R}).$$

证明 $\big(\mathbb{P}(\frac{N_{\lambda\cdot}}{\lambda} \in \cdot), \lambda \to +\infty\big)$ 在 $D([0,1]), \mathbb{R})$ 上关于一致收敛拓扑满足 LDP, 写出其速率函数.

§ 4. 强拓扑情形

再回到 §0 的一般框架. 令 $(X, \|\cdot\|)$ 是一可分 Banach 空间, $Y = X'$ 为其对偶空间. 此时 $\mathcal{B}_Y(X)$ 为 X 的 Borel σ- 域.

假设 $\forall y \in Y = X'$,

$$\Lambda(y) = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_X e^{\langle x,y\rangle/\epsilon} d\mu_\epsilon(x) \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

其 Legendre 变换为

$$\Lambda^*(x) = \{\langle x,y\rangle - \Lambda(y) \mid y \in X'\}. \tag{4.2}$$

类似于 (1.3), 定义 Λ^* 的严格凸点集为

$$x_0 \in C_s(\Lambda^*) \iff \exists y_0 \in X' \text{ 使} \forall x \in X, \Lambda^*(x) > \Lambda^*(x_0) + \langle x - x_0, y_0 \rangle, \tag{4.3}$$

即 $x_0 = \nabla\Lambda(y_0)$.

下面的结果属于 Baldi(1990).

定理 4.1 假设 (4.1). 若

(i) $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 是在 $(X, \|\cdot\|)$ 中列指数胎紧的,

(ii) $C_s(\Lambda^*) \cap [\Lambda^* \le L]$ 在 $[\Lambda^* \le L]$ 中稠密 (关于 $\|\cdot\|$- 拓扑),

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 上满足速率函数为 Λ^* 的 LDP.

证明 1) 首先据命题 0.2,$(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 上满足 w*-ULD. 据定理 I.3.6 和条件 (i), 得 ULD.

2) 至于 LLD, 像有限维情形一样, 它依赖于

引理 4.2 $\forall x_0 \in C_s(\lambda^*), \forall \|\cdot\|$- 开集 $G \ni x_0$, 有

$$l(G) \ge -\Lambda^*(x_0). \tag{4.4}$$

证明 设 $y_0 \in Y = X'$ 由 (4.3) 所确定的点. 定义

$$\nu_\epsilon(dx) = \frac{e^{\langle x, y_0 \rangle / \epsilon} d\mu_\epsilon}{\int_X e^{\langle x, y_0 \rangle / \epsilon} d\mu_\epsilon(x)}. \tag{4.5}$$

注意在 Gibbs 原理 (定理 I.2.5) 中, 由 "$(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 的 ULD 和极限 $\Lambda(y_0)$ 的存在性" 就可推出 $(\nu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 上满足速率函数为

$$\Lambda^*_{y_0}(x) = \Lambda^*(x) - \langle x, y_0 \rangle + \Lambda(y_0) \tag{4.6}$$

的好大偏差上界. 余下的证明完全与引理 1.2 相同, 故略去.

3) 条件 (ii) 保证了: $\forall$ 开 $G \subset (X, \|\cdot\|)$,

$$\inf_G \Lambda^* = \inf_{G \cap C_s(\Lambda^*)} \Lambda^*,$$

所以由 (4.4) 推出所需的 LLD. ∎

下面我们通过凸分析中的 Bishop-Phelps 定理将条件 (ii) 化为关于 Λ 的可导性.

定理 4.3 假设 $(\mu_\epsilon; \epsilon > 0)$ 是可分 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 上一族概率测度，满足 (4.1). 若

(i) $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(X\|\cdot\|)$ 上指数胎紧 * 的,

(ii) Λ 在 $Y = X'$ 上 Gateaux- 可导,

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(X\|\cdot\|)$ 上满足速率函数为 Λ^* 的 LDP.

证明 依引理 4.2, 关键在于证明： $\forall x_0 \in \mathrm{Dom}\Lambda^*$,

$$\exists (x_n)_{n\geq 1} \subset C_s(\Lambda^*) \text{使} x_n \to x, \liminf_{n\to\infty} \Lambda^*(x_n) \leq \Lambda^*(x_0).$$

为此，引用

Bishop-Phelps 定理([Ru2],p.159) 设 Λ 是 Banach 空间 Y 上的实值凸函数. 设 $x_0 \in Y'$ 满足

$$\exists c \in \mathbb{R} : \Lambda(y) \geq \langle x_0, y\rangle - c, \forall y \in Y, \tag{4.7}$$

则 $\forall y \in Y, \forall \epsilon > 0, \exists y' \in Y, x' \in \partial\Lambda(y')$, 使得

$$\|x' - x_0\| \leq \epsilon, \|y' - y\| \leq \frac{1}{\epsilon}\big(\Lambda(y) - \langle x_0, y\rangle + \Lambda^*(x_0)\big), \tag{4.8}$$

其中 $\Lambda^* : Y' \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ 是 Λ 的 Legendre 变换.

为应用此定理，首先观察到 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 上满足速率函数为 Λ^* 的 ULD, 当然在 $(X, \sigma(X, X'))$ 上更成立. 据定理 2.1, Λ 在 $(Y, \tau(Y, X))$ 上连续. 此时据 (A.6),

$$\partial\Lambda(y) \subset X, \qquad \forall y \in Y,$$

且 Λ 关于 $\|\cdot\|$- 连续 (因 $\tau(Y, X)$ 比 $\|\cdot\|$ 弱).

若 $x_0 \in X \subset Y'$ 满足 $\Lambda^*(x_0) < +\infty$, 条件 (4.7) 对 $c = \Lambda^*(x_0)$ 成立. 因此 $\forall n \geq 1$, 取 $y_n \in Y$ 使

$$\Lambda^*(x_0) < \langle x_0, y_n\rangle - \Lambda(y_n) + \frac{1}{n}. \tag{4.9}$$

将上一定理应用于

$$y = y_0, \quad \epsilon(n) = \frac{1}{n(\|y_n\|+1)},$$

可找到 $y_n' \in Y$ 和 $x_n \in \partial\Lambda(y_n') \subset X$(如前所证), 使

$$\|x_n - x_0\| \le \epsilon(n), \tag{4.10a}$$

$$\|y_n' - y_n\| \le \frac{1}{\epsilon(n)}\big(\Lambda(y_n) - \langle x_0, y_0\rangle + \Lambda^*(x_0)\big) < \frac{1}{n\epsilon(n)}. \tag{4.10b}$$

最后一不等式是根据 (4.9). 因 Λ 在 Y 上 Gateaux- 可导, $x_n = \nabla\Lambda(y_n') \in C_s(\Lambda^*)$. 而由 $(A.10)$ 有

$$\begin{aligned}\Lambda^*(x_n) &= \langle x_n, y_n'\rangle - \Lambda(y_n') \\ &\le \Lambda^*(x_0) + \|x_n - x_0\|\,\|y_n' - y\| + \|x_n - x_0\|\,\|y_n\| \\ &\le \Lambda^*(x_0) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n},\end{aligned}$$

即 (4.6) 得证. ∎

注 (a) 列指数胎紧性作为波兰空间上 LDP 的充要条件, 在具体应用中往往是困难和关键的.

(b) 当 Banach 空间 X 不可分时, 将定理 4.1 和 4.3 中的列指数胎紧换成“指数胎紧 * 性”, 它们仍成立. 怎样通过 Λ 来刻画 $\mu_\epsilon, \epsilon > 0$ 关于 $\|\cdot\|$ 的指数胎紧 * 性是个公开问题.

(c) 在列指数胎紧 (或胎紧 *) 假设下, 对 X' 的任意 $\sigma(X', X)$-稠密子空间 Y, 都有 $\Lambda^* = \Lambda_Y^*$. 其证明留给读者.

习 题

习题 4.4 设 X 是局部凸 Hausdorff 空间, $\Lambda : X' \to (-\infty, +\infty]$ 凸且 $\Lambda(0) = 0$. 记 $\mathcal{C}(Y, X)$ 为 $Y = X'$ 在 X 的紧凸集上一致收敛拓扑. 证明如下性质等价:

(i) Λ^* 在 (X, s) 上下紧且 Λ 在 0 的一个 $\mathcal{C}(Y, X)$ 邻域 N 上关于 $\mathcal{C}(Y, X)$- 下半连续;

(ii) Λ 在 $0 \in X' = Y$ 关于 $C(Y, X)$- 连续或在一个 $C(Y, X)$ 邻域上有上界;

(iii) 存在 X 的紧凸集 K, 使 $\Lambda|_{^\circ K} \leq 1$, 其中 $^\circ K = \{y \in X' : \sup_{x \in K}\langle x, y\rangle \leq 1\}$ 是 K 的极集.

习题 4.5 设 $(X\|\cdot\|)$ 是可分 Banach 空间. 对 X 中的对称凸集 K 定义 Minkowski 泛函

$$q_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in K\} \quad (\inf \emptyset \doteq +\infty).$$

若存在对称凸且紧 $K \subset X$, 使

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \int_X e^{q_K(x)/\epsilon} d\mu_\epsilon < +\infty, \tag{4.11a}$$

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上指数胎紧. 特别地, 对 X- 值 i.i.d.r.v. $(\xi_n)_{n\geq 1}$, 若存在对称凸集 $K \subset X$, 使

$$\mathbb{E}e^{q_K(\xi_1)} < +\infty, \tag{4.11b}$$

则 $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in \cdot)$ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 上满足 LDP.

习题 4.6 设 $(H, |\cdot|)$ 是可分 Hilbert 空间, $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 是它上的一族概率测度, 满足 (4.1) 和 Gateaux- 可导性. 假设 $\{e_i\}_{i\geq 1}$ 是 H 的一组标准正交基, V_n 是由 $(e_1, \cdots, e_n)$ 生成的子空间. 若 $\forall \delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon\big(x \subset H : |x - P_{V_n}x| > \delta\big) = -\infty,$$

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 $(H, |\cdot|)$ 上满足 LDP.

习题 4.7 设 (T, P) 是度量紧空间, $C(T)$ 是 T 上连续函数构成的 Banach 空间, $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 是 $C(T)$ 上的一族概率测度. 证明: 若 $\forall \delta > 0, \forall t \in T$ 有

$$\lim_{h\to 0} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon\big(x : \sup_{p(s,t)\leq b} |x(t) - x(s)| > \delta\big) = -\infty,$$

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 是指数胎紧 * 的.

第三章 几个经典结果

本章证明大偏差理论的几个经典结果：Sanov 定理，Cramér 定理和 Schilder 定理，并介绍它们的推广和应用.

§1. Sanov 定理和熵

1.1 熵

设 E 是波兰空间，$\mathcal{E}$ 是其 Borel σ- 域. 设 $\alpha,\beta\in M_1(E)$(概率测度空间).

定义 1.1 概率测度 β 相对于 α 在 $\mathcal{E}$ 上的熵为

$$h(\beta;\alpha)\doteq\begin{cases}\int_E \frac{d\beta}{d\alpha}\log\frac{d\beta}{d\alpha}d\alpha, & \text{若}\beta<<\alpha,\\ +\infty, & \text{否则}.\end{cases}\tag{1.1}$$

注 因函数 $x\log x:[0,+\infty)\longrightarrow[-e^{-1},+\infty)$ $(0\log 0\doteq 0)$ 是严格凸、下有界的，所以 (1.1) 中的积分在 $(-\infty,+\infty]$ 中存在.

下面是相对熵的一些初等性质.

命题 1.2

(a) $h(\beta,\alpha)\geq 0; h(\beta,\alpha)=0$ 当且仅当 $\beta=\alpha$.

(b) $h(\cdot;\alpha)$ 在 $(M_1(E),\tau)$ 上是下紧、凸的. 此外，对 $\beta_0\neq\beta_1, 0<\lambda<1$，设 $\beta_\lambda=\lambda\beta_1+(1-\lambda)\beta_0$ 满足 $h(\beta_\lambda;\alpha)<+\infty$，则

$$h(\beta_\alpha;\alpha)<\lambda h(\beta_1;\alpha)+(1-\lambda)h(\beta_0;\alpha).$$

(c) $\|\beta-\alpha\|_{ver}$(全变差) $\leq\sqrt{2h(\beta;\alpha)}$.

(d) 若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{E}$ 的子 σ- 域，$\beta|_{\mathcal{A}}<<\alpha|_{\mathcal{A}}$，则

$$h(\beta;\alpha)=h_{\mathcal{A}}(\beta;\alpha)+\int_E h(\beta_\omega;\alpha_\omega)d\beta(\omega),\tag{1.2a}$$

其中 $\alpha_\omega = \alpha(\cdot \mid \mathcal{A}), \beta_\omega = \beta(\cdot|\mathcal{A})$ 是 α, β 在已知 σ- 域 $\mathcal{A}$ 时的正则条件分布族， $h_{\mathcal{A}}(\beta,\alpha)$ 是 β 关于 α 限制在σ -域$\mathcal{A}$ 上的相对熵. 特别地，若 $h(\beta;\alpha) < +\infty$, 有

$$h(\beta;\alpha) \geq h_{\mathcal{A}}(\beta;\alpha), \tag{1.2b}$$

等号成立当且仅当 $\alpha(\cdot|\mathcal{A}) = \beta(\cdot|\mathcal{A}), \beta$-a.s..

证明 (a) 依 $x\log x$ 在 $[0,+\infty)$ 上的严格凸性和 Jensen 不等式，对 $\beta << \alpha$, 有

$$h(\beta;\alpha) \geq \int_E \frac{d\beta}{d\alpha} d\alpha \log \int_E \frac{d\beta}{d\alpha} d\alpha = \alpha(E) \log \alpha(E) = 1,$$

且 “ = ” 成立的充要条件为

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = c\ (\text{常数}), \qquad \alpha\text{-a.s.}.$$

此时必有 $c = 1$, 即 $\beta = \alpha$.

(b) 只证 $h(\cdot;\alpha)$ 的 τ- 下紧性，其余结论都是 $x\log x$ 的严格凸性的直接推论. 为证 τ- 下紧性，首先注意到

$$K_L = \{ f_\beta \hat{=} \frac{d\beta}{d\alpha} \bigg| h(\beta;\alpha) \leq L \}$$

在 $L^1(\alpha)$ 中是一致可积的.

Dunford-Pettis 定理告诉我们：

$$\mathbb{A} \subset L^1(\alpha)\text{一致可积} \Longleftrightarrow \mathbb{A}\text{在}\big(L^1(\alpha), \sigma(L^1(\alpha), L^\infty(\alpha))\big)\text{中相对紧},$$

因此 K_L 在 $L^1(\alpha)$ 中关于 $\sigma(L^1, L^\infty)$ 相对紧. 而 K_L 凸，且在 $(L^1(\alpha), \|\cdot\|_1)$ 中闭 (Fatou 引理), 所以它也是 $\sigma(L^1, L^\infty)$- 闭的 (据第二章附录 (A.7)). 因此 K_L 是 $(L^1, L^\infty))$ 中的紧集.

最后注意到

$$T\ :\ f \in L^1(\alpha) \longmapsto f \cdot \alpha \in M_b(E)$$

是从 $(L^1(\alpha),\sigma(L^1,L^\infty))$ 到 $(M_b(E),\tau)$ 中的连续映照，所以 K_L 的 T- 映像集

$$T(K_L)=\{\beta\in M_1(E)\mid h(\beta;\alpha)\le L\}$$

是 $(M(E),\tau)$ 中的紧集.

(c) 参见 Kullbck(1967).

(d) 性质 (1.2b) 是 (1.2a) 和 (a) 的直接推论. 下证 (1.2a). 已设 $\beta|_{\mathcal{A}}<<\alpha|_{\mathcal{A}}$, 可证：在 $\mathcal{E}$ 上 $\beta<<\alpha$ 的充要条件是 $\beta_\omega<<\alpha_\omega$, β-a.s.(验证要用到条件分布族的 Radon-Nikodym 定理，见 [Re]). 此时有

$$\left.\frac{d\beta}{d\alpha}\right|_{\mathcal{E}}=\left.\frac{d\beta}{d\alpha}\right|_{\mathcal{A}}\frac{d\beta_\omega}{d\alpha_\omega}.$$

因此

$$\begin{aligned}h(\beta;\alpha)&=\mathbb{E}^\beta\log\frac{d\beta}{d\alpha}=\mathbb{E}^\beta\log\left.\frac{d\beta}{d\alpha}\right|_{\mathcal{A}}+\mathbb{E}^\beta\mathbb{E}^{\beta_\omega}\log\frac{d\beta_\omega}{d\alpha_\omega}\\&=h_{\mathcal{A}}(\beta;\alpha)+\mathbb{E}^\beta h(\beta_\omega;\alpha_\omega),\end{aligned}$$

即 (4.2a) 成立. ∎

下面是关键的 Donsker-Varadhan 变分公式.

命题 1.3 对 $f:E\longrightarrow[-\infty,+\infty]$,$\mathcal{E}$- 可测，记

$$\Lambda_\alpha(f)=\log\int_E e^f d\alpha,\tag{1.3}$$

则有

(a) $\forall\beta\in M_1(E)$,

$$\begin{aligned}h(\beta;\alpha)&=\sup\left(\int_f d\beta-\Lambda_\alpha(f)\mid f\in b\mathcal{E}\right)\\&=\sup\left(\int_E fd\beta-\Lambda_\alpha(f)\mid f\in C_b(E)\right),\end{aligned}\tag{1.4a}$$

(b) $\forall\mathcal{E}$- 可测 $f: E \longrightarrow [-\infty, +\infty]$,

$$\Lambda_\alpha(f) = \sup\Big(\int_E f d\beta - h(\beta;\alpha) \mid \beta \in M_1(E), \int_E |f| d\beta < +\infty\Big). \tag{1.4b}$$

证明 (a) 先设 β 关于 α 不绝对连续. 取 $A \in \mathcal{E}$ 使 $\alpha(A) = 0$, 但 $\beta(A) > 0$. 此时 $\forall\lambda > 0, \Lambda_\alpha(\lambda 1_A) = 0$. 从而 (用第二章 §3 的记号),

$$\begin{aligned}(\Lambda_\alpha)^*_\tau(\beta) &\hat{=} \sup\Big(\int_E f d\beta - \Lambda_\alpha(f) \mid f \in b\mathcal{E}\Big)\\ &\geq \sup_{\lambda>0}\big(\lambda\beta(A) - \lambda_\alpha(\lambda 1_A)\big) = +\infty = h(\beta;\alpha).\end{aligned}$$

以下设 $\beta << \alpha$. 先证 $(\Lambda_\alpha)^*_\tau(\beta) \leq h(\beta;\alpha)$. 为此, $\forall f \in b\mathcal{E}$, 记 $h_\beta = \dfrac{d\beta}{d\alpha}$, 有

$$\begin{aligned}\exp\Big(\int_E f d\beta - h(\beta, \alpha)\Big) &= \exp[\mathbb{E}^\beta(f - \log h_\beta)]\\ &\leq \mathbb{E}^\beta \exp(f - \log h_\beta) = \mathbb{E}^\beta \frac{e^f}{h_\beta} 1_{[h_\beta > 0]} \leq \mathbb{E}^\alpha e^f,\end{aligned}$$

即 $\int_E f d\beta - \Lambda_\alpha(f) \leq h(\beta;\alpha), \forall f \in g\mathcal{E}$, 它正是所需的.

现证 $(\lambda_\alpha)^*_\tau(\beta) \geq h(\beta;\alpha)$. 若 $h_\beta = \dfrac{d\beta}{d\alpha} \in (\frac{1}{c}, c)(c > 1)$. 取 $g_\beta = \log h_\beta \in b\mathcal{E}$, 有

$$(\Lambda_\alpha)^*_\tau(\beta) \geq \mathbb{E}^\beta g_\beta - \log\int_E e^{g_\beta} d\alpha = h(\beta;\alpha).$$

其次, 若 $h_\beta \geq \frac{1}{c}$, 取 $g_n = g_\beta \wedge n$, 由 Fatou 引理有

$$\begin{aligned}(\Lambda_\alpha)^*_\tau(\beta) &\geq \lim_{n\to+\infty}\Big(\int_E g_\beta \wedge n d\beta - \log\int_E \exp(g_\beta \wedge n) d\alpha\Big)\\ &= \mathbb{E}^\beta g_\beta - \log\int_E \exp g_\beta d\alpha\\ &= h(\beta;\alpha).\end{aligned}$$

最后，在 $h_\beta \geq 0$ 一般情形，对 $\theta \in [0,1)$，取 $\beta_\theta = \theta\alpha + (1-\theta)\beta$，

$$h_\theta = \theta + (1-\theta)h_\beta = \frac{d\beta_\theta}{d\alpha}.$$

当 $\theta \to 0+$ 时，易知 $h(\beta_\theta;\alpha) \to h(\beta;\alpha)$. 因 $\theta \longmapsto (\Lambda_\alpha)^*_\tau(\beta_\theta)$ 是凸函数，所以

$$\begin{aligned}(\Lambda_\alpha)^*_\tau(\beta) &\geq \lim_{\theta\to 0+} \Lambda^*_\tau(\beta_\theta) \qquad (\text{凸函数的简单性质})\\ &\geq \lim_{\theta\to 0+} h(\beta_\theta;\alpha) \qquad (\text{据前述情形})\\ &= h(\beta;\alpha).\end{aligned}$$

至此，(1.4a) 的第一个等式已证．至于第二个等式，对任意 $\beta \in M_1(E)$, $f \in b\mathcal{E}$, 可取

$$f_n \in C_b(E),\ \|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty;\ f_n \to f, (\alpha+\beta)\text{-a.s.}.$$

从而据控制收敛定理，

$$\begin{aligned}(\Lambda^*_\alpha)^*_w(\beta) &\doteq \sup\Big(\int_E g d\beta - \Lambda_a(g) \mid g \in C_b(E)\Big)\\ &\geq \lim_{n\to\infty}\Big(\int_E f_n d\beta - \Lambda_a(f_n)\Big)\\ &= \int_E f d\beta - \Lambda_\alpha(f).\end{aligned}$$

因 $f \in b\mathcal{E}$ 任意，得 $(\Lambda_\alpha)^*_w(\beta) \geq (\Lambda_\alpha)^*_\tau(\beta)$. 而反向不等式是显然的．(a) 证毕．

(b) 利用习题 3.9,$\Lambda_\alpha(f)$ 满足那里的性质 (iii), 因此在 $b\mathcal{E}$ 上是关于 Mackey 拓扑 $\tau(b\mathcal{E}, M_b(E))$ 连续的，且 $(\Lambda_\alpha)^*_\tau(\beta) = +\infty, \forall \beta \in M_b(E)\backslash M_1(E)$. 依 Fenchel-Legendre 定理，(1.4b) 对 $f \in b\mathcal{E}$ 成立 (注：在下面的 Sanov 定理证明中，此处所需的连续性可通过定理 3.6 直接证明).

设 $f: E \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ 可测，对 $M, N \geq 0$, 取

$$f_{M,N} = (f \wedge M) \vee (-N), \ f_M = f,$$

因 (1.4b) 对 $f_{M,N}$ 成立，且对 M 固定，

$$\beta \longmapsto -\int_E f_{M,N} d\beta + h(\beta; \alpha), \ N \in \mathbb{N}$$

是 $(M_1(E), \tau)$ 上一单调上升的下紧函数列．据第一章命题 1.2, 有

$$\begin{aligned}
\Lambda_\alpha(f_M) &= \lim_{N \to +\infty} \Lambda_\alpha(f_{M,N}) \qquad \text{(Fatou 引理)} \\
&= \inf_{N>0} \sup \Big(\int_E f_{M,N} d\beta - h(\beta; \alpha) \mid \beta \in M_1(E) \Big) \\
&= \sup_{\beta \in M_1(E)} \inf_{N>0} \Big(\int_E f_{M,N} d\beta - h(\beta; \alpha) \Big) \\
&= \sup_{\beta \in M_1(E)} \Big(\int_E f_M d\beta - h(\beta; \alpha) \Big).
\end{aligned}$$

在上面等式中取关于 $M > 0$ 的上确界 (等价于让 $M \to +\infty$), 即得 (1.4b). ∎

现在我们重新陈述引论中的 Sanov 定理.

定理 1.4 $\{\mathbb{P}(L_n \in \cdot), n \to +\infty\}$ 在 $(M_1(E), \tau)$ 中满足速率函数为 $h(\cdot; \alpha)$ 的大偏差原理，速度为 $1/n$.

证明 对 $\epsilon = \epsilon(n) = 1/n$, $\mu_{\epsilon(n)} = \mathbb{P}(L_n \in \cdot)$, 它的 Cramér 泛函为

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \int_{M_1(E)} \exp(\langle \beta, f \rangle n) d\mu_{\epsilon(n)}(\beta) \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E} \exp \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \big(\mathbb{E} \exp f(\xi_0) \big)^n = \Lambda_\alpha(f).
\end{aligned}$$

据命题 1.3,$(\Lambda_\alpha)^*_\tau(\beta)=h(\beta;\alpha)$. $\Lambda_\alpha(f)$ 显然满足第二章定理 3.6 的 (iii), 给出 ULD. 而 Λ_α 又在 $b\mathcal{E}$ 上 Gateaux- 可导，据定理 2.7, 又有相应的 LLD. ∎

1.2 Csiszär 熵投影

在 Sanov 定理的应用中，首先需要知道

$$\inf_{\beta\in\mathbb{A}} h(\beta;\alpha)\hat{=}h(\mathbb{A};\alpha), \tag{1.5}$$

其中 $\mathbb{A}\subset M_1(E)$ 在应用中表示某个特定"偏差区域集". 更进一步，在统计中的极大似然原理或统计力学的极大熵原理中，需要知道：是否存在唯一的 $\beta_0\in\mathbb{A}$, 使 $h(\beta_0;\alpha)=h(\mathbb{A};\alpha)$.

Csiszär(1975) 发现相对熵极像 Hilbert 空间中的 $|\cdot|^2$(模平方), 具有良好的投影性质.

定理 1.5 设 $\mathbb{A}$ 是 $M_1(E)$ 中的凸集，满足 $h(\mathbb{A};\alpha)<+\infty$.

(a) 若存在 $\beta_0\in\mathbb{A}$ 使 $h(\beta_0;\alpha)=h(\mathbb{A};\alpha)$, 则 β_0 是唯一的. 此时称 β_0 为 α 在 $\mathbb{A}$ 上的 Csiszär 熵投影.

(b) 若 $\mathbb{A}$ 是 $M_1(E)$ 的 $\|\cdot\|_{var}$- 闭集，则存在唯一的 β_0 使 $h(\beta_0;\alpha)=h(\mathbb{A};\alpha)$.

(c) $\beta_0\in\mathbb{A}$ 是 α 在 $\mathbb{A}$ 上的 Csiszär 投影的充要条件是

$$h(\beta;\beta_0)+h(\beta_0;\alpha)\leq h(\beta;\alpha),\ \forall\beta\in\mathbb{A}. \tag{1.6}$$

证明 (a) 据命题 1.2(b) 中 $h(\cdot;\alpha)$ 的严格凸性，唯一性是易见的.

(b) 取一列 $(\beta_n)_{n\geq1}$ 使

$$\infty+>h(\beta_n;\alpha)\to h(\mathbb{A};\alpha).$$

易验证如下公式：

$$\begin{aligned}&h(\beta_n;\alpha)+h(\beta_m;\alpha)\\&=2h(\frac{\beta_n+\beta_m}{2};\alpha)+h(\beta_m;\frac{\beta_n+\beta_m}{2})+h(\beta_n;\frac{\beta_n+\beta_m}{2}).\end{aligned} \tag{1.7}$$

因 $\mathbb{A}$ 是凸集， $\frac{\beta_m+\beta_n}{2} \in \mathbb{A}$, 因此当 $m, n \to +\infty$ 时，上式的最后两项均趋于零．所以依命题 1.2(c)

$$\|\beta_n - \beta_m\|_{\text{var}} \le \|\beta_n - \frac{\beta_n+\beta_m}{2}\|_{\text{var}} + \|\frac{\beta_n+\beta_m}{2} - \beta_m\|_{\text{var}} \to 0.$$

于是存在 β_0, 使 $\|\beta_n - \beta_0\|_{\text{var}} \to 0$ $(n \to +\infty)$. 因 $\mathbb{A}$ 是 $\|\cdot\|_{\text{var}}$- 闭的， $\beta_0 \in \mathbb{A}$. 而据 $h(\cdot;\alpha)$ 的下半连续性，有

$$h(\beta_0;\alpha) \le \liminf_{n\to\infty} h(\beta_n;\alpha) = h(\mathbb{A};\alpha).$$

因此等式成立，即 β_0 是 Csiszär 投影．

(c) 条件 (1.6) 的充分性显然．余证必要性．不妨设 $h(\beta;\alpha) < +\infty$(否则 (1.6) 自动成立)．此时， $\forall\lambda \in [0,1]$, 令

$$\begin{aligned} &\beta_\lambda = \beta_0 + \lambda(\beta - \beta_0) \ \in \mathbb{A}, \\ &f_\lambda = \frac{d\beta_\lambda}{d\alpha} \ (\text{有意义，因} h(\beta_\lambda;\alpha) < +\infty). \end{aligned}$$

注意到 $\lambda \longmapsto f_\lambda \log f_\lambda$ 是凸函数，所以当 $\lambda \downarrow 0$ 时，

$$\frac{1}{\lambda}(f_\lambda \log f_\lambda - f_0 \log f_0)$$

单调下降到

$$\frac{d}{d\lambda}(f_\lambda \log f_\lambda)\Big|_{\lambda=0} = (f_1 - f_0)[\log f_0 + 1].$$

利用 Fatou 引理得

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{d}{d\lambda} h(\beta_\lambda;\alpha)\Big|_{\lambda=0+} &= \frac{d}{d\lambda}\int_E f_\lambda \log f_\lambda d\alpha\Big|_{\lambda=0+} \\ &= \int_E (f_1 - f_0)[\log f_0 + 1] d\alpha = \mathbb{E}^\beta \log f_0 - h(\beta_0;\alpha). \end{aligned} \tag{1.8}$$

($\mathbb{E}^\beta \log f_0 \in [-\infty, +\infty)$ 有意义, 因由上面的单调性推出 $f_1 \log f_0 \le$ 一个 α- 可积函数.) 此外有

$$h(\beta;\alpha) - h(\beta;\beta_0) = \mathbb{E}^\beta \log f_1 - \mathbb{E}^\beta \log \frac{f_1}{f_0} = \mathbb{E}^\beta \log f_0. \quad (1.9)$$

(注: 在此式中, $\frac{a}{0} = +\infty, \log 0 = -\infty, \log +\infty = +\infty$.) 将 (1.9) 代入 (1.8), 即得 (1.6). ∎

注 1.6 当 Csiszár 投影 β_0 是 $\mathbb{A}$ 的代数内点时 (即 $\in \mathrm{ri}\mathbb{A}$), 在 (1.8) 中可取左导数而证明 (1.8) 中的量为零, 所以有

$$h(\beta;\beta_0) + h(\beta_0;\alpha) = h(\beta;\alpha), \ \forall \beta \in \mathbb{A},$$

它正是 Hilbert 空间中勾股定理的类似物.

习 题

习题 1.7 设 $T : (E, \epsilon) \longrightarrow (E, \epsilon)$ 是可测同胚. 证明

(a) $h(\beta \circ T, \alpha \circ T) = h(\beta; \alpha)$.

(b) 若凸 $\mathbb{A} \subset M_1(E)$ 是 T- 稳定的 (即 $\forall \in \mathbb{A}, \beta \circ T \in \mathbb{A}$), 则对 $\alpha \circ T = \alpha$,α 在 $\mathbb{A}$ 的 Csiszár 投影 β_0 是 T- 不变的 (即 $\beta_0 \circ T = \beta_0$).

习题 1.8 设 $(f_i)_{i=1,\cdots,d}$ 是 E 上的可测 $[-\infty, \infty]$- 值可测函数, $(a_i)_{i=1,\cdots,d} \in \mathbb{R}^d$. 令

$$\mathbb{A} = \left\{ \beta \in M_1(E) \mid f_i \in L^1(\beta), \int_E f_o d\beta = a_i \right\}. \quad (1.10)$$

假设 $\alpha \in M_1(E)$ 在 $\mathbb{A}$ 上有 Csiszár 投影. 证明 $\beta_0 \in \mathbb{A}$ 是 α 的投影的充要条件是: $\exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, 使

$$\beta_0(dx) = \exp\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i f_i \right) \alpha(dx) / Z, \quad (1.11)$$

其中 Z 是正规化常数 (参看 [Cs]).

习题 1.9(Csiszär 1975) 在上习题中假设 $d=+\infty$. 证明：若 β_0 是 α 在 $\mathbb{A}$ 的 Csiszär 投影，则存在 $f\in\overline{[f_i,i=1,\cdots]}^{L^1(\beta_0)}$(其中 $[f_i,i=1,2,\cdots]$ 是 (f_i) 生成的线性空间), 使

$$\beta_0(dx)=\exp(f)\alpha(dx)/Z.$$

习题 1.10(Csiszär 1975) 设 $(E,\mathcal{E})=(E_1,\mathcal{E}_1)\times(E_2,\mathcal{E}_2), P\in M_1(E),\mu_i\in M_1(E_i)$ 固定， $i=1,2$. 定义

$$\mathbb{A}=\{Q\in M_1(E)\mid Q_i\hat{=}Q(x_i\in\cdot)=\mu_i,i=1,2\}. \tag{1.12}$$

(a) 若 $Q\in\mathbb{A}$ 满足： $\exists\phi:E_1\longrightarrow[0,+\infty],\psi:E_2\longrightarrow[0,+\infty]$ 可测，使

$$Q(dx_1,dx_2)=\phi(x_1)\psi(x_2)P(dx_1,dx_2) \tag{1.13a}$$

和

$$\log\phi\in L^1(\mu_1),\ \log\psi\in L^1(\mu_2), \tag{1.13b}$$

则 Q 是 P 在 $\mathbb{A}$ 上的 Csiszär 投影.

(b) 反之，若 Q 是 P 在 $\mathbb{A}$ 上的 Csiszär 投影，则 (1.13a) 成立.

§ 2. Cramér 型定理

设 $(\xi_n)_{n\geq0}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上取值于可分 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$ 的一串独立同分布随机变量，共同分布为 α. 记

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k,\quad n\geq1$$

为部分和. 记 $(Y=X',\|\cdot\|')$ 为 X 的对偶 Banach 空间，引入 Cramér 泛函和它的 Legendre 变换

$$\Lambda_\alpha(y)=\log\int_X e^{\langle x,y\rangle}\alpha(dx),\ \forall y\in Y, \tag{2.1a}$$

$$\Lambda_\alpha^*(x)=\sup\big(\langle x,y\rangle-\Lambda_\alpha(y)\mid y\in Y\big). \tag{2.1b}$$

此节主要是通过 Λ_α^* 来刻画 $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n}\in\cdot)$ 的大偏差.

2.1 Donsker-Varadhan 的 Cramér 型定理

定理 2.1(Donsker-Varadhan,1976) 若

$$\forall\lambda>0:\ \mathbb{E}\exp(\lambda\|\xi_0\|)<+\infty, \tag{2.2}$$

则 $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n}\in\cdot), n\to+\infty$ 在 $(X,\|\cdot\|)$ 上满足速率函数为 Λ_α^* 的 LDP.

我们将给出它两个不同的证明. 首先介绍基于 Sanov 定理的证明. 我们需要如下一般事实:

引理 2.2 设 $(\mu_n)_{1\le n\le+\infty}\subset M_1(E)$, 且 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_\infty$, 其中 E 是波兰空间. 设 $\mathbb{F}$ 是 $C_b(E)$ 的子集, 满足

(i) $\sup_{f\in\mathbb{F}}\|f\|_\infty<+\infty$ (一致有界);

(ii) $\lim_{\delta\to0}\sup_{\rho(x,y)<\delta}\big(|f(x)-f(y)|;f\in\mathbb{F}\big)=0$ (等度连续),

则当 $n\to+\infty$ 时

$$\sup_{f\in\mathbb{F}}\left|\int_E fd\mu_n-\int_E fd\mu_\infty\right|\to0. \tag{2.3}$$

证明 它可由 Prokorov 的胎紧性定理和 Arzèlà-Ascoli 定理加以证明, 细节留个读者.

下面分三点来证明定理 2.1.

1) 有界情形, 即 $\|\xi_0\|\le R,\mathbb{P}$-a.s.. 此时考虑均值映射

$$\beta\in M_1(\overline{B}(0,R))\longmapsto m(\beta)\doteq\int_X x\beta(dx), \tag{2.4}$$

其中 $\overline{B}(0,R)=\{x\in X|\,\|x\|\le R\}$ 是闭球.

记 $\mathbb{F}\doteq\{\langle\cdot,y\rangle|y\in X',\|y\|'\le1\}$. 它是 $\overline{B}(0,R)$ 上的一致有界、等度连续函数族. 据引理 2.2, 当 $(\beta_n)_{n\ge1}\subset M_1(\overline{B}(0,R))$ 弱收敛于 β_∞ 时,

$$\|m(\beta_n)-m(\beta_\infty)\|=\sup_{\|y\|'\le1}\left|\int_X\langle x,y\rangle\big(d\beta_n(x)-d\beta_\infty(x)\big)\right|\to0.$$

即映射 $\beta \to m(\beta)$ 是从 $(M_1(\overline{B}(0,R)), \xrightarrow{w})$ 到 $(X, \|\cdot\|)$ 的连续映射. 而据 Sanov 定理 1.4, $I\!P(L_n \in \cdot)$ 在 $M_1(\overline{B}(0,R))$ 上关于 τ- 拓扑满足 LDP, 当然关于 $\xrightarrow{w}$ 亦然. 所以依收缩原理,

$$I\!P(\frac{S_n}{n} \in \cdot) = I\!P(m(L_n) \in \cdot)$$

在 $(X, \|\cdot\|)$ 中满足速率函数为

$$I(x) = \inf\left\{\ h(\beta;\alpha) \middle| \int_X \|x\| d\beta < +\infty,\ m(\beta) = x\right\} \tag{2.5}$$

的 LDP.

2) 在 ξ_k 无界情形用截尾法. 令

$$\begin{aligned}
k_R(x) &= x\mathbf{1}_{[\|x\| \le R]},\ x \in X,\\
S_n^{(R)} &= \sum_{k=0}^{n-1} h_R(\xi_k),\\
f_R(\beta) &= \int_X h_R(x) d\beta,\ \beta \in M_1(X),\\
f(\beta) &= \begin{cases} \int_X x d\beta, & \text{若 } \int_X \|x\| d\beta < +\infty,\\ 0, & \text{否则}. \end{cases}
\end{aligned}$$

据比较方法 (命题 I.4.1), 若能证明

$$\begin{aligned}
\sup\big(\ \|f_R(\beta) - f(\beta)\|\ |\beta \in M_1(X), h(\beta;\alpha) \le L\big) \to 0\\
(R \to +\infty, \forall L \in (0, +\infty)),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\lim_{R=to+\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log I\!P\big(\|f(L_n - f_R(L_n)\| > \delta\big) = -\infty. \tag{2.7}$$

则

$$I\!P\big(f(L_n) \in \cdot\big) = I\!P\Big(\frac{S_n}{n} \in \cdot\Big), n \to +\infty$$

在 $(X, \|\cdot\|)$ 上满足 LDP, 速率函数为 (2.5) 中给出的 I.

为证 (2.6), 依命题 1.3.(b), 有

$$\|f_R(\beta)-f(\beta)\| \le \int_X \|x\|1_{[\|x\|>R]}d\beta \\ \le \frac{1}{\lambda}h(\beta;\alpha)+\log\int_X \exp(\lambda\|x\|1_{[\|x\|>R]})dx,$$

其中 $\lambda>0$ 任意. 依条件 (2.2) 和控制收敛定理, $\forall\lambda>0$,

$$\lim_{R\to\infty}\log\int_X \exp(\lambda\|x\|1_{[\|x\|>R]})\alpha(dx)=0,$$

由此证得 (2.6).

至于 (2.7), 我们有如下估计:

$$I\!P(\|f_R(L_n)-f(L_n)\|>\delta)=I\!P(\|S_n^{(R)}-S_n\|>n\delta) \\ \le e^{-n\delta\lambda}I\!E\exp(\lambda\|S_n-S_n^{(R)}\|) \\ \le e^{-n\delta\lambda}(I\!E\exp\lambda\|\xi_0\|1_{[\|\xi_0\|>R]})^n,$$

$$(2.7)\text{ 的左端} \le \limsup_{R\to+\infty}\big(-\lambda\delta+\log E\exp\lambda\|\xi_0\|1_{[\|\xi_0\|>R]}\big) \\ =-\lambda\delta.$$

因 $\lambda>0$ 任意, (2.7) 得证.

3) 剩下证明 $\Lambda_\alpha^*=I$. 据第二章命题 0.2 和 2.7,$I\!P(S_n/n\in\cdot)$ 在 $(X,\sigma(X,X'))$ 上满足速率函数为 Λ_α^* 的 w^*-LDP, 同样也满足速率函数为 I 的 LDP(因 $\|\cdot\|$ 比 $\sigma(X,X')$ 强). 据 w*-LDP 速率函数的唯一性, 有 $\Lambda_\alpha^*=I$. ∎

下面给出定理 2.1 的第二种证明, 它基于 de Acosta(1985) 的下述引理 (证明见 [deA]).

引理 2.3 若条件 (2.2) 成立, 则存在 X 的紧凸集对称集 K, 使

$$I\!Ee^{q_K(\xi_0)}<+\infty, \tag{2.8}$$

其中 $q_K(x) = \infty(\lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in K)$ 是 K 的 Minkowski 泛函.

注 de Acosta(1985) 还观察到：若 $\dim X = +\infty$, 则存在 X- 值随机变量，满足

$$\exists \delta > 0 \ : \ \mathbb{E} e^{\delta \|\xi\|} < +\infty, \tag{2.9}$$

但不满足 (2.8).

定理 2.1 的另一证明：条件 (2.2) 蕴含 (2.8), 而 (2.8) 保证了 $\mathbb{P}(S_n/n \in \cdot)$ 的指数胎紧 (见第二章习题 4.5). 据第二章定理 4.3, $\mathbb{P}(S_n/n \in \cdot)$ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 上满足 LDP.

2.2 Bahadur-Zabell 定理

Bahadur-Zabell(1979) 证明了

定理 2.4 不要任何可积性条件，$\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in \cdot)$ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 上满足速率函数为 Λ_α^* 的 w*-LDP.

证明 1) w*-ULD：它是第二章命题 0.2 的直接推论.

2) 进一步证明：$\forall x \in X$ 有 $\Lambda_\alpha^*(x) = I(x)$, 其中 $I(x)$ 是

$$I(x) = \inf\left\{ h(\beta;\alpha); \int_X \|x\| d\beta(x) < +\infty,\ m(\beta) = x \right\}$$

的下半连续修正.

事实上，据命题 1.3(b),$\forall y \in Y = X'$,

$$\begin{aligned}&\Lambda_\alpha(y)\\ &= \sup\left\{ \int_X \langle x, y\rangle d\beta(x) - h(\beta;\alpha) \mid \beta \in M_1(X), \int_X |\langle x, y\rangle| d\beta < +\infty \right\}.\end{aligned} \tag{2.9a}$$

下面来证明

$$\begin{aligned}&\Lambda_\alpha(y)\\ &= \sup\left\{ \int_X \langle x, y\rangle d\beta(x) - h(\beta;\alpha) | \beta \in M_1(E), \int \|x\| d\beta < +\infty \right\}.\end{aligned} \tag{2.9b}$$

首先，在这里 "$\geq$" 是显然的. 为证 "$\leq$", 设 β 满足 $h(\beta;\alpha) < +\infty, \int_X |\langle x,y\rangle| d\beta < +\infty$. 对 $\delta > 0$, 取

$$\beta_\delta = e^{-\delta\|x\|}\beta/c(\delta)\,,\ c(\delta) = \int_X e^{-\delta\|x\|}d\beta(x), \tag{2.10}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_X \|x\| d\beta_\delta < +\infty;\\
&\int_X \langle x,y\rangle d\beta_\delta \longrightarrow \int_X \langle x,y\rangle d\beta \quad (\delta \to 0+);\\
&\beta_\delta \xrightarrow{\tau} \beta.
\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}
h(\beta_\delta,\alpha) &= \mathbb{E}^{\beta_\delta} \log \frac{d\beta_\delta}{d\alpha}\\
&= \mathbb{E}^{\beta_\delta}\Big[-\delta\|x\| \log c(\delta) + \log \frac{d\beta}{d\alpha}\Big]\\
&\leq -\log c(\delta) + \mathbb{E}^\beta \Big[\frac{e^{-\delta\|x\|}}{c(\delta)} \log \frac{d\beta}{d\alpha}\Big]\\
&\to \mathbb{E}^\beta \log \frac{d\beta}{d\alpha} = h(\beta;\alpha) \quad (\text{控制收敛}).
\end{aligned}$$

它与 $h(\cdot;\alpha)$ 的下半连续性蕴含 $h(\beta_\delta;\alpha) \to h(\beta;\alpha)$. 因此

$$\begin{aligned}
(2.9\text{b}) \text{ 的右端} &\geq \lim_{\delta\to 0}\Big(\int_X \langle x,y\rangle d\beta_\delta - h(\beta_\delta;\alpha)\Big)\\
&= \int_X \langle x,y\rangle d\beta - h(\beta;\alpha).
\end{aligned}$$

因 β 是任意的，据 (2.9a), 就证明了 (2.9b).

在 (2.9b) 中先对 $\{\beta : m(\beta) = x\}$ 求上确界，就得到

$$\Lambda_\alpha(y) \doteq \sup\big(\langle x,y\rangle - I(x) \mid x \in X\big) = I^*(y).$$

可以直接验证 I 是非负凸函数，它满足 Fenchel-Legendre 定理 (A.8) 中的性质 (ii)，因此由 (A.8) 推出

$$I^\Gamma = I^{**} = \Lambda_\alpha^*,$$

它正是所要证的.

3) LLD. 这一步证明： $\forall$ 开 $G \ni x$,

$$l(G) \hat{=} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in G) \ge -I(x). \tag{2.11a}$$

注意到由 (2.11a) 推出 (因 I^Γ 是 I 的下半连续修正)

$$l(G) \ge \sup_{x\in G} \big(-I(x)\big) = -\inf_G I = -\inf_G I^\Gamma.$$

据第二步，它正是所要的 LLD.

注意到 (2.11a) 等价于

$$\begin{aligned} &l(G) \ge -h(\beta;\alpha), \quad \forall \beta \in M_1(E)\text{满足} \\ &h(\beta;\alpha) < +\infty, \ \int \|x\| d\beta < +\infty, m(\beta) = x. \end{aligned} \tag{2.11b}$$

下证 (2.11b). 不妨设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (X^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(X)^{\mathbb{N}}, \alpha^{\mathbb{N}})$, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Ω 上的坐标函数族. 取 $\mathbb{Q} = \beta^{\mathbb{N}}$, 则

$$\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_n} << \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}, \quad \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_n} = \exp \sum_{k=0}^n \log \frac{d\beta}{d\alpha}(\xi_k),$$

其中 $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \cdots, \xi_n)$. 因此有

$$\mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n} \in G\Big) \ge E^{\mathbb{Q}}\Big[1_{[\frac{S_n}{n}\in G]} \exp \sum_{k=0}^n -\log \frac{d\beta}{d\alpha}(\xi_k)\Big].$$

对任意 $\delta > 0$, 考虑

$$A(n,\delta) \hat{=} \Big[\sum_{k=0}^n \log \frac{d\beta}{d\alpha}(\xi_k) < n(h(\beta;\alpha) + \delta)\Big].$$

据通常的实值大数定律，有

$$\mathbb{Q}\big(A(n,\delta)\big)\to 1.$$

而依可分 Banach 值大数定律，因为 $m(\beta)=x\in G$, 又有

$$\mathbb{Q}\Big(\frac{S_n}{n}\in G\Big)\to 1.$$

从而由

$$\mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n}\in G\Big)\geq \exp\big[-n(h(\beta;\alpha)+\delta)\big]\mathbb{Q}\Big(A(n,\delta)\cap\Big[\frac{S_n}{n}\in G\Big]\Big)$$

得知

$$l(G)\geq -h(\beta;\alpha)-\delta.$$

(2.11b) 得证. ∎

下面是第二章注 1.6 中所断言的

推论 2.5 设 $(\xi_n)_{n\geq 1}$ 是取值于 $\mathbb{R}^d(d\in\mathbb{N})$ 中的 i.i.d.r.v., 共同分布为 α. 则 $\mathbb{P}(S_n/n\in\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上满足 (某一速度函数 I) LDP 的充要条件是 (2.9), 即

$$\exists\delta>0\ :\ \mathbb{E}^{\delta\|\xi_0\|}<+\infty.$$

证明 充分性由第二章命题 2.1 和本章定理 2.4 给出. 至于必要性，由 w*-LDP 的速率函数唯一性和定理 2.4 得 $I=\Lambda_\alpha^*$. 再应用第二章命题 2.1 即得必要性. ∎

上面的推论很自然地引导我们猜测 (2.9) 可能在无限维时仍是 LDP 的充分条件. 但它是不对的，下面是高付清在 [G2] 中给出的

定理 2.6 $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n}\in\cdot)$ 在 $(X,\|\cdot\|)$ 上满组 LDP 的充要条件是 ξ_0 满足 (2.8).

证明 充分性由定理 2.4 中的 w*-LDP 和 (2.8) 所保证的指数胎紧性直接导出. 下证关键的必要性. 据 Lynch-Sethraman 定理

(第二章定理 3.6), $\{\mathbb{P}(\frac{S_n}{n}\in\cdot), n\geq 1\}$ 是指数胎紧的. 因紧集生成的最小凸对称闭集是紧的, 因此存在紧凸对称集 $K\subset N$ 和 $N\geq 1$, 使 $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\notin K\right)\leq e^{-5}$, $\forall n\geq N$. 而

$$\left[\frac{\xi_0}{n}\notin 3K\right]\subset\left[\frac{S_n}{n}\notin K\right]\cup[(\xi_1+\cdots+\xi_{n-1})/n\notin 2K]$$
$$\subset\left[\frac{S_n}{n}\notin K\right]\cup[(\xi_1+\cdots+\xi_{n-1})/(n-1)\notin 2K],$$

从而 $\forall n\geq N+1, \mathbb{P}\left(\frac{\xi_0}{n}\notin 3K\right)\leq 2e^{-5(n-1)}$, 即有

$$\mathbb{P}(q_k(\xi_0)\geq 3n)\leq 2e^{-5(n-1)}.$$

因此

$$\mathbb{E}e^{q_K(\xi_0)}\leq\sum_{n=0}^{\infty}e^{3(n+1)}\mathbb{P}\big(3n\leq q_k(\xi_0)<3(n+1)\big)<+\infty. \qquad ∎$$

注 如引理 2.3 下面的注所言, 在 $\dim X=+\infty$ 时, 总存在 X-值随机变量满足 (2.9), 但不满足 (2.8). 因此 (2.9) 不是 LDP 的充分条件.

2.3 不可分 Banach 空间情形: 非参数统计模型

在 §2.1 和 §2.2 中的所有结果都本质地依赖于 Banach 空间的可分性. 而在非参数统计中出现的往往是不可分 Banach 空间. 其模型如下:

设 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上一串取值于波兰空间 E 中独立同分布随机变量, 共同分布为 α. 设 $\mathbb{F}$ 是 E 上一族 $\mathcal{E}$ 可测实值函数, 满足

$$\sup_{f\in\mathbb{F}}|f(x)|<+\infty,\ \alpha\text{-a.s.}.$$

记

$$l^{\infty}(\mathbb{F})=\{\gamma:\mathbb{F}\longrightarrow\mid\|\gamma\|_{\mathbb{F}}\hat{=}\sup_{g\in\mathbb{F}}|\gamma(f)|<+\infty\} \tag{2.12}$$

$(l^\infty(\mathbb{F}), \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$ 是 Banach 空间，且当 $\mathbb{F}$ 无穷时，它是不可分的.

对 $\beta \in M_1(E)$, 它对应于 $\mathbb{F}$ 上的函数

$$\beta^{\mathbb{F}}(f) \hat{=} \begin{cases} \int_E f d\beta, & 若 |f| \in L^1(\beta), \\ +\infty, & 否则. \end{cases} \tag{2.13}$$

这样可以将 L_n 看成是 $l^\infty(\mathbb{F})$ 中的元 $L_n^{\mathbb{F}}$. 非参数统计的一个基本课题是研究 $L_n^{\mathbb{F}}$ 在 $l^\infty(\mathbb{F})$ 中的极限性质.

为避免可测性问题，恒假设

$$\text{(H)} \qquad \left(L_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\right)_{f\in\mathbb{F}} \text{是依 Doob 意义可分的,}$$

或者更特殊地, $\mathbb{F}$是可数的.

此时取 $l^\infty(\mathbb{F})$ 的 σ- 域为 $\mathcal{B}_{\mathbb{F}} = \sigma(\gamma \longmapsto \gamma(f) \mid f \in \mathbb{F})$, 则 $L_n^{\mathbb{F}}$ 是取值于 $(l^\infty(\mathbb{F}), \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$ 中的随机变量.

下面的结果是作者 (1994) 利用 Talagrand 等周不等式思想证明的.

定理 2.7 假设有 (H) 和

$$\mathbb{E}\exp\left(\lambda \sup_{f\in\mathbb{F}} |f(\xi_0)|\right) < +\infty, \ \forall \lambda > 0. \tag{2.14}$$

$\forall \gamma \in l^\infty(\mathbb{F})$, 令

$$I(\gamma) = \inf\{h(\beta;\alpha) \mid h(\beta;\alpha) < +\infty, \beta^{\mathbb{F}} = \gamma\}. \tag{2.15}$$

则 $\mathbb{P}(L_n^{\mathbb{F}} \in \cdot)$ 在 $(l^\infty(\mathbb{F}), \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$ 上满足速率函数为 I 的 LDP, 当且仅当如下条件被满足:

(i) $(\mathbb{F}, d_\alpha)$ 是全有界的，其中 $d_\alpha(f,g) = \|f-g\|_{L^2(\alpha)}$,

(ii) 弱大数定律成立，即 $\forall \delta > 0$,

$$\mathbb{P}(\|L_n^{\mathbb{F}} - \alpha^{\mathbb{F}}\| > \delta) \to 0 \ (n \to +\infty).$$

习　题

习题 2.8 在定理 2.1 的条件下，证明

(a) $\Lambda^*(x) = \inf\{h(\beta;\alpha) \mid \int_X \|x'\|\beta(dx') < +\infty, \int_X x'\beta(dx') = x\}, \forall x \in X$.

(b) 若 $x \in [\Lambda^* < +\infty]$ 固定. 证明存在 $\beta_x \in M_1(X)$ 使得 (a) 中下确界达到.

(c) 进一步证明存在 $y \in X'$ 使

$$\beta_x = \frac{\exp(\langle x', y\rangle)\alpha(dx')}{Z(y)}, \tag{2.16}$$

其中 $Z(y)$ 是正规化常数.

习题 2.9 设 $(\xi_i)_{i\geq 1}$ 是实值 i.i.d.r.v., 经验分布

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}(\xi_i), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) 证明 F_n^* 关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致收敛于 ξ_1 的分布函数 F,a.s..

(b) 证明 $\mathbb{P}(F_n^*, \in \cdot)$ 在 $\mathbb{D}(\mathbb{R}, [0,1])$ 上关于一致收敛拓扑满足 LDP, 写出其速率函数.

(c) 若 $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\xi_i = 0)$, 给出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^*(x) - F(x)| > \delta) \doteq D(\delta) \tag{2.17}$$

的显式表达.

(d) 若 ξ_i 是 $[0,1]$ 上的均匀分布，找出 $D(\delta)$ 的精确值.

(e) 对任意连续分布，考虑 $F(\xi_i)$, 证明 (2.17) 中的 $D(\delta)$ 不依赖于 F.

§ 3. Schilder 定理

此节将第一章习题 4.4 中关于 Brown 运动的 Schilder 定理推广到抽象 Wiener 空间情形.

3.1 抽象 Wiener 空间

定义 3.1 称 (X, H, μ) 是 抽象 Wiener 空间, 若

(i) $(X, \|\cdot\|)$ 是可分 Banach 空间;

(ii) $(H, |\cdot|)$ 是可分 Hilbert 空间, 且 $H \subset X$ 是稠密连续嵌入;

(iii) μ 是 X 上以 H 为核 (即 self-reprodusing) 的 Gauss 测度, 即 $\forall y \in X' \subset H' = H$,

$$\int_X e^{i\langle x, y\rangle}\mu(dx) = e^{-|y|^2/2}, \quad \forall y \in X' \subset H. \tag{3.1}$$

注 3.2 (i) 此时嵌入映射 $x \in H \longmapsto x \in X$ 是紧算子, 即 H 的单位闭球在 X 中紧.

(ii) 任意 X 上的 Gauss 测度都可化为抽象 Wiener 空间情形.

引理 3.3(Fernique 定理) 存在 $\delta > 0$ 使

$$\mathbb{E}^{\mu} \exp \delta \|x\|^2 < +\infty. \tag{3.2}$$

证明 参看 [DS].

3.2 一般 Schilder 定理

设 (X, H, μ) 是抽象 Wiener 空间, $\forall \epsilon > 0$ 定义

$$\mu_\epsilon(A) = \mu(A/\sqrt{\epsilon}), \quad \forall A \in \mathcal{B}(X). \tag{3.3}$$

则 $(\mu_\epsilon, \epsilon > 0)$ 是 X 上的 Gauss 分布族, 且 $\mu_\epsilon \xrightarrow{w} \delta_0 (\epsilon \to 0)$.

定理 3.4 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0)$ 在 X 上满足速率函数为

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|_H^2, & 若 \in H, \\ +\infty, & 否则 \end{cases} \tag{3.4}$$

的 LDP.

证明 构造一串 X- 值独立同分布随机变量 $(\xi_n)_{n\geq 1}$, 共同分布为 μ. 则对 $y \in X' \subset H$,

$$\Lambda_\mu(y) = \log \mathbb{E}^\mu \exp\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}|y|_H^2.$$

据 Donsker-Varadhan 的 Cramér 定理,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \in \cdot\Big) = \mu_{\epsilon(n)}(\cdot),\ \epsilon(n) = \frac{1}{n}$$

在 X 上满足速率函数为 Λ_μ^* 的 LDP. 下证 $\Lambda_\mu^* = I$. 为此固定 $x \in H$. 因 $X' \subset H$ 是稠密的, 可取 $y_n \in X'$, $y_n \xrightarrow{|\cdot|} x$. 因此

$$\Lambda_\mu^*(x) \geq \lim_{n\to\infty} \geq \lim_{n\to\infty} \Big(\langle x, y_n\rangle - \frac{1}{2}|y_n|^2\Big) = \frac{1}{2}|x|^2.$$

另外又有

$$\langle x, y\rangle \leq \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2,\ \forall x \in H, y \in X' \subset H,$$

从而 $\Lambda_\mu^*(x) \leq I(x)$. 综上所述有: $\Lambda_\mu^*(x) = I(x)$, $\forall x \in H$. 下设 $x \notin H$. 需证 $\Lambda_\mu^*(x) = +\infty$. 若不然,

$$\sup(\langle x,y\rangle | y \in X', |y| \leq 1) \leq \Lambda_\mu^*(x) + \frac{1}{2} < +\infty,$$

即 x 是 $(X', |\cdot|)$ 上的有界线性泛函. 因 $X' \subset H$ 是稠密连续嵌入, 从而 $x \in H$. 矛盾.

最后剩下从 $(\mu_{\epsilon(n)}, n \to \infty)$ 的 LDP 推到 $(\mu_\epsilon, \epsilon \to 0+)$ 情形. 据比较方法第一章 §4, 仅需证

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu\Big(\|\frac{x}{\sqrt{\epsilon}} - \frac{x}{\sqrt{\epsilon(n)}}\| > \delta\Big) = -\infty,\ \forall \delta > 0, \tag{3.5}$$

其中 $\epsilon(n) = 1/[1/\epsilon]$(从而 $\epsilon/\epsilon(n) \to 1$). 而对 $\frac{1}{n+1} < \epsilon \le \frac{1}{n}$,

$$\mu\left(\|\frac{x}{\sqrt{\epsilon}} - \frac{x}{\sqrt{\epsilon(n)}}\| > \delta\right) \le \mu\left(\frac{\|x\|}{\sqrt{\epsilon(n)}} > \delta \frac{\sqrt{\epsilon(n+1)}}{\sqrt{\epsilon(n)} - \sqrt{\epsilon(n+1)}}\right)$$

注意到 $\frac{\sqrt{\epsilon(n+1)}}{\sqrt{\epsilon(n)}-\sqrt{\epsilon(n+1)}} \to +\infty$, 应用 $(\mu_{\epsilon(n)}, n \to +\infty)$ 的 LDP, 即得 (3.5). ∎

推论 3.5 定义

$$\gamma = \sup\{\delta > 0 \ : \ \mathbb{E}^{\mu} \exp \delta \|x\|^2 < +\infty\}, \tag{3.6}$$

则

$$\gamma = \inf\{I(x) \mid x \in X, \|x\| = 1\}. \tag{3.7}$$

证明 易证

$$\begin{aligned} -\gamma &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \log \mu(\|x\| > n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log \mu\left(\frac{\|x\|}{n} > 1\right) \\ &= -\inf\{I(x) \quad \|x\| \ge 1\} \end{aligned}$$

(因 $\inf\{I(x) \mid \|x\| \ge 1\} = \inf\{I(x) \mid \|x\| > 1\}$). ∎

附录 有关凸分析的若干结果

一、定义和术语

设 X 是实向量空间， $A\subset X$. 称 A 是凸集, 若 $(\forall x,x'\in A)(\forall\lambda\in(0,1)):\lambda x+(1-\lambda)x'\in A$. 称 A 是仿线性空间, 若 $(\forall x,x'\in A)(\forall\lambda\in\mathbb{R}):\lambda x+(1-\lambda)x'\in A$. 记 $\mathrm{aff}A$ 为 A 生成的仿线性子空间, 即所有包含的仿线性子空间之交集.

称 $a\in A$ 是凸集 A 的 (代数) 相对内点, 若 $(\forall x\in\mathrm{aff}A)$ $(\exists r_0>0)(\forall r:0\le r\le r_0):a+r(x-a)\in A$. 由所有 (代数) 相对内点组成的集称为 A 的 (代数) 相对内集, 记作 $\mathrm{ri}A$. 当 $\mathrm{aff}A$ 维数有限时， $\mathrm{ri}A$ 正是 A 在 $\mathrm{aff}A$ 中的内集

函数 $f:X\longrightarrow(-\infty,+\infty]$ 称为凸函数, 若

$$f\big(\lambda x+(1-\lambda)x'\big)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(x')$$

对所有 $x,y\in X,\lambda\in(0,1)$ 成立. 它的有限定义域为

$$\mathrm{Dom}f=\{x\in X\mid f(x)<+\infty\}.$$

回忆 X 代数对偶空间是由 X 上所有线性泛函组成的向量空间, 记作 X^*. 一个线性泛函 $x^*\in X^*$ 称为凸函数 f 在 $x_0\in\mathrm{Dom}f$ 的次微分, 若

$$f(x)\ge f(x_0)+x^*(x-x_0),\ \forall x\in X.$$

由所有在 x_0 处次微分组成的集记为 $\partial f(x_0)$.

当 $\mathrm{aff}(\mathrm{Dom}f)=X$ 时， f 称为在 $x_0\in\mathrm{ri}(\mathrm{Dom}f)$Gateaux- 可导, 若 $\forall x\in X$, 方向导数

$$\lim_{\epsilon\to0}\frac{f(x_0+\epsilon x)-f(x_0)}{\epsilon}\triangleq\nabla_xf(x_0)$$

存在. 此时映射 $x\longmapsto\nabla_xf(x_0)$ 是 X 上的线性泛函, 即属于 X^*, 记作 $\nabla f(x_0)$.

下面是两个基本事实：设 $f: X \longmapsto (-\infty, +\infty]$ 凸，则

(A.1) $\forall x_0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{Dom} f)$, $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.(见 [Ho],p.23).

(A.2) 设 $\mathrm{aff}(\mathrm{Dom} f) = X, x_0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{Dom} f)$. 则 f 在 x_0 点 Gateaux 可导的充要条件是 $\partial f(x_0)$ 是单点集. 此时 $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ (见 [Ho],p.29).

二、有限维情形

此节恒设 $\dim X = d < +\infty$. 不妨设 $X = X^* = \mathbb{R}^d$.

(A.3) 设 $f: \mathbb{R}^d \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ 凸. 则 f 在 $x_0 \in (\mathrm{Dom} f)^o$(拓扑内集) 点可微分，当且仅当 f 在 x_0 点 Gateaux-可导 (见 [Ro],p.244).

(A.4) 设 f^Γ 是凸函数 $f: \mathbb{R}^d \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ 的下半连续修正，满足：$\exists x_0 \in \mathbb{R}^d$ 使 $f^\Gamma(x_0) \in \mathbb{R}$. 则 $f^\Gamma : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ 凸，且

$$f^\Gamma(x) = \begin{cases} f(x), & 若 x \in \mathrm{ri}(\mathrm{Dom} f), \\ +\infty, & 若 \notin \overline{\mathrm{Dom} f}(闭包). \end{cases}$$

特别地，f 在 $\mathrm{ri}(\mathrm{Dom} f)$ 上下半连续，且 $\mathrm{ri}(\mathrm{Dom} f) = \mathrm{ri}(\mathrm{Dom} f^\Gamma)$, $\overline{\mathrm{Dom} f} = \overline{\mathrm{Dom} f^\Gamma}$(见 [Ro],p.56).

三、拓扑性质

以下恒设实向量空间 X 被赋予了局部凸 Hausdorff 拓扑. 记 X' 为由所有 X 上连续线性型构成的拓扑对偶空间.

(A.5) 当凸集 A 的内部非空时 (即 $A^o \neq \emptyset$), 则 $A^o = \mathrm{ri} A$ 且

$$(\forall x_0 \in A^o, x_1 \in \overline{A})(\forall \lambda \in [0,1]) : x_0 + \lambda(x_1 0 x_0) \in A^o$$

(见 [Ho],p.59).

凸函数的一个极为重要的性质是：

(A.6) 若凸函数 $f: X \to [-\infty, +\infty]$ 在 X 的一个非空开集上有上界，则 f 在 $(\mathrm{Dom} f)^o$ 上连续. 此时 $\forall x_0 \in (\mathrm{Dom} f)^o$, $\emptyset \neq \partial f(x_0) \subset X'$(见 [La],p.333,Th.6.2.7).

(A.7) 一个凸子集在 X 中闭，当且仅当它关于 $\sigma(X,X')$- 闭. 一个凸函数 f 在 X 上是下半连续的，当且仅当它关于 $\sigma(X,X')$- 下半连续 (Hahn-Banach 定理的著名推论).

四、 Legendre 变换

设 $f: X \longrightarrow (-\infty,+\infty]$ 且不恒为 $+\infty$. 它的 Legendre 变换为

$$f^*(y) = \sup(\langle x,y\rangle - f(x) \mid x \in X),\ \forall y \in X'.$$

显然 $f^*: X' \longrightarrow (-\infty,+\infty]$ 是凸，关于 $\sigma(X',X)$- 下半连续的. 定义 f^* 的 Legendre 变换，即 f 的 重 Legendre 变换

$$f^{**}(x) = \sup\left(\langle x,y\rangle - f^*(y) \mid y \in X'\right).$$

下面是著名的 Fenchel 定理 (或 Fenchel-Legendre 定理):

(A.8) f^{**} 是 f 的下半连续凸修正，即所有不大于 f 的下半连续凸函数族中最大的一个. 进一步地，若 $f: X \longrightarrow (-\infty, X]$ 凸且满足下述条件之一:

(i) $\exists x_o \in X$ 使 $f^\Gamma(x_0) \in I\!R$;

(ii) $\exists y \in X'$ 及 $c \geq 0$ 使 $f(\cdot) \geq \langle \cdot, y\rangle - c$,

则 $f^{**} = f^\Gamma$(f 的下半连续修正)(见 [La],p.342–343).

下面是在第二章 2.2 中起重要作用的

(A.9) (Moreau 定理) 设 $f: X \longrightarrow (-\infty,+\infty]$ 下半连续、凸且不恒为 $+\infty$. 则 $f^*: X' \longrightarrow (-\infty,+\infty]$ 关于 $\sigma(X',X)$- 下紧的充要条件是 f 在 0 点关于 Mackey 拓扑 $\tau(X,X')$- 连续 (见 [La],p.347).

最后，我们所用到的事实是

(A.10) 设 $f: X \longrightarrow (-\infty,+\infty]$ 凸， $x_0 \in \mathrm{Dom} f$, $y_0 \in X'$. 则

$$y_0 \in \partial f(x_0) \Longleftrightarrow f(x_0) + f^*(y_0) = \langle x_0, y_0\rangle$$

(见 [La],p.350).

评 注

第一章

(1) §1 及 §2 的框架是 Varadhan(1966) 首先在 X 是 Polish 空间情形引入的 (除 w*-ULD, 它是在 [W1] 中引入的).Laplace 原理和 Gibbs 原理的陈述取自 [El] 和 [DS].

(2) 指数胎紧性技巧隐含于 Donsker 和 Varadhan 的系列奠基性工作 [DV,I-IV], 它被 Azencott([Az]) 抽象出来并系统加以应用. 指数胎紧性作为 Polish 空间上 LDP 的必要条件是 Lynch 和 Sethuraman(1987) 首先证明的. 指数胎紧 * 性和定理 3.2 是作者在 [W1] 引入的.

(3) 比较方法的两个结果 (命题 4.1 和 4.2) 取自 [DS].

(4) 乘积空间上的大偏差取自 [W1]. 推论 5.4 在 A 有限情形属于 Lynch 和 Sethuraman[LS]. 投影极限空间的大偏差是 Dawson–Gärtner 引入的. §5.2 中的结果是新的.

第二章

(1) 总体而言, Cramér 方法中只有三点本质上是大偏差理论特有的: 命题 0.2 中的 w*-ULD, 引理 1.2 中的局部下界和投影极限方法. 前二点是 Gärtner(1977) 从 Cramér (1938) 的先驱工作中抽象出来的, 后一点归功于 Dawson-Gärtner(1987). 其余部分都是凸分析理论的应用.

(2) 在有限维情形, 除开命题 1.1 的必要性取自 [W1] 外, §1.1 和 §1.2 中的其余结果均属于 Gärtner[Gä] 和 Ellis[E]. 后者首先将凸分析系统应用于 Cramér 方法. §1.3 中的中偏差 (命题 1.7) 属于 Borovkov 和 Mogulskii[BM1,2]. 最近陈夏 (1990) 和 Ledoux(1922) 得到了可分 Banach 空间中偏差成立的充要条件, 它比这里的充

分条件 (1.11) 弱得多.

(3) §2 中主要结果 (定理 2.1) 属于作者的工作 [W1],[W2,I], 但工具 (投影极限方法) 属于 Dawson-Gärtner(1987). 特别是当 Λ 在全空间上有限、可导且满足定理 2.1(iii) 时, 他们证明了 LDP. 其余结果见 [W1].

(4) 在 §3.1 关于 $\xrightarrow{w}$ 的 ULD,Stroock([St]) 首先找到了一个充要条件, 而更实用的充分条件 (定理 3.3(iii)) 取自 Léonard(1991). 定理 3.3 的等价性取自 [W1]. 同样, 定理 3.6(iii) 的充分性来自 Léonard(1990), 等价性取自 [W1]. 关于淡收敛拓扑的定理 3.7 取自 [W1].

(5) 主要结果定理 4.1 属于 Baldi(1990). 定理 4.3 的证明是新的, 至于结果本身, 作者不知是谁最先得到的.

第 三 章

§1. Sanov 定理 (定理 1.4) 是由 Sanov 首先在 $E = [0,1]$ 并关于弱收敛得到的. 现在的关于 τ- 拓扑情形则是在 [GOR] 中建立的. 回忆 Komogrov-Ornstein 定理: 两个 Bernouilli 遍历系统可测同胚的充要条件是它们的熵相同. 所以说 Sanov 定理揭示了独立同分布随机变量族的本质. 所有 1.3 的结果均来自于 [Cs], 它是许多新近工作的出发点, 建议读者阅读.

§2. 定理 2.1 属于 Donsker-Varadhan[DV].Bahadur-Zabell[BZ] 是关于独立同分布 B- 值部分和大偏差的一个经典文献. 但我们这里用 Sanov 定理想法去证明它则是新的, 其思路可推广到 Markov 过程情形, 参看 [W2].Cramér 定理的充要条件 (2.8) 是高付清得到的. 非可分 Banach 空间情形需要另外的方法和思想, 见作者 [W3].

§3. Schilder 定理的推广可见 Deuschel-Stroock[DS]. 推论 3.5 属于 Donsker-Varadhan[DV]. 它们的更进一步推广见 [BL].

参 考 文 献

[Az] Azencott R., Grandes déviations et applications, In "Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour ", P.L. Hennequin(ed.), Lect. Notes in Math., 774, 1–176, Springer, Berlin, 1980.

[BZ] Bahadur R. R., Zabell S. L. , Large deviations of the sample mean in general vector space,Ann. Probab., 7(1979), 587–621.

[Ba] Baldi P., Large deviations and stochastic homogeneisation, Ann. Math. Pura. Appl., 151(1988), 161–177.

[Bo] Bourbaki N. , Espaces Vectoriels Topologiques (Livre V), Chap.III–V, Hermann Paris, 1955.

[BL] Ben Arous G., Ledoux M., Schilder's Large deviation principle without topology. in Asymptotique problems in probability theory, Wiener functionals and asymptotics, Pitman Reseach Notes in Math. Series 284, 107–121, 1993.

[BM1] Borovkov A. A., Mogulskii A. A., Probabilities of large deviations in topological vector space I. Siberian Math. J., 19(1978), 697–709.

[BM2] Borovkov A. A., Mogulskii A. A., Probabilities of large deviations in topological vector space II. Siberian Math. J., 21(1980), 12–26.

[Br] W. Bryc , Large deviations by asymptotic value method. In Diffusion Processes and Related Problems in Analysis, Vol.I, M. A. Pinsky(ed.), 447–472, Birkaüser, 1990.

[Ch1] Chen X., The moderate deviations of independent random vectors in a Banach space. Chinese J. Appl. Prob. Statist., 7(1991), 24–32.

[Ch2] Chen X., On the lower bounds of i.i.d. random variables in a Banach space , to appear in Chinese J. Appl. Prob. Statist..

[Cr] Cramér H., Sur un nouveau théoème limite de la théorie de probabilités., Actualités Scientifiques et Industrielles, 736, 5-23. Colloque consacré à la théorie de probabilités. Vol.3, Hermann, Paris, 1938.

[Cs] Csiszar , I-divergence geometry of probability distributions and minimisation problems, Ann. Proba., 3(1975), 146-158.

[DG] Dawson, D. W., Gartner J., Long time fluctuation of weakly interacting diffusions, Stochastics, 20(1987), 247–308.

[deA] de Acosta A., Upper bounds for large deviations of dependent random vectors, Z. Wahrsch. verw. Geb., 69(1985).

[DM] Dellacherie C., Meyer P. A., Probabilités et Potentiels, Vol.I, Hermann 1976.

[DZ] Dembo A. , Zeitouni O., Large deviations techniques and applications, Jones and Barlett, Boston, MA, 1993.

[DS] Deuschel J. D., Stroock D. W., Large deviations, Pure and Appl. Math., 137, Academic Press, 1989.

[DV1] Donsker M. D., Varadhan S. R. S., Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I-IV,Comm. Pur. Appl. Math., 28(1975), 1–47 and 279–301; 29(1976), 389–461; 36(1983), 183–212.

[DV2] Donsker M. D., Varadhan S. R. S. , Large deviations for stationary Gaussian processes, Comm. Math. Phys., 97(1985), 187–210.

[E] Ellis R. S., Large Deviations and Statistical Mechanics, Springer, Berlin, 1985.

[FW1] Freidlin M. I., Wentzell A. D., On small random perturbations of dynamical systems, Russian Math. Surveys 25(1970), 1–55.

[FW2] Freidlin M. I., Wentzell A. D., Random Perturbation of Dynamical systems,translated by J. Szuc, Springer, Berlin, 1984.

[G1] Gao F. Q., Characterization of Cramèr's theorem in a Banach space, preprint, 1991.

[G2] Gao F. Q., Moderate deviations of Markov processes, Advances in Math. (Beijing Univ.), 1993.

[Ga] Gartner J. , On large deviations from the invariant measures, Theory Probab. Appl., 7(1977), 239–246.

[GOR] Groeneboom P., Oosterhoff J., Ruymgaart F. H., Large deviation theorems for empirical probability measures,Ann.Probab., 7(1979), 553–586.

[H] Holmes R. B. , Geometrical Functional Analysis and its Applications, G.T.M., 24, Springer-Verlag, 1975.

[J] Jain N. C., Large deviations for additive functionals of Markov processes, Ann. Probab. 17(3), 1073-1098; 1990.

[Ki] Kifer Y., Large deviations in dynamical systems and stochastic processes, Preprint 1989.

[Ko] Kolmogorov A. N., On dynamical systems with an integral invariant on the torus, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 93, 763-766.

[Ku1] Kullback S., Information Theory and Statistics, Wiley, New York, 1959.

[Ku2] Kullback S., A lower bound for discrimination information in terms of variation, IEEE Trans. Information Theory, IT-13, 126-127, 1967

[La] Laurent P. L., Approximation et Optimisation, Collection Enseignement des Sciences, 13, Hermann, 1967.

[L] Ledoux M., Sur les déviations modérées des sommes de variables aléatoires vectorielles independantes de meme loi . Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.28, 2, 267-280 (1992).

[Le] Léonard C., Large déviations in the dual of a normed space, preprint, 1991.

[LS] Lynch J., Sethuraman J., Large deviations for processes with independent increments, Ann. Probab., 15(1987), 610–627.

[Ro] Rockafellar R. T. , Covex Analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

[Ru1] Ruelle D., Statistical Mechanics, Rigorous Results, Benjamin, 1969.

[Ru2] Ruelle D., Thermodynamic Formalism, Addison-Wesley, 1978.

[Sa] Sanov I. N., On the probability of large deviations of random variables, (in russian), Mat. Sb., 42, 11–44. (English translation in Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability, I, 213–244, 1961).

[Sc] Schaefer H. H., Topological Vector Spaces. Macmillan Serie in Advanced Math. and Theoretical Phys., 1966.

[Sch] Schilder M., Some asymptotic formulaes for Wiener integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 125(1966), 63–85.

[St] Stroock D. W., An introduction to the theory of large deviations, Springer, Berlin, 1984.

[V1] Varadhan S. R. S., Asymptotic probability and differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 19(1966), 261–286.

[V2] Varadhan S. R. S., Large deviations and applications, SIAM, Philadelphia, 1984.

[V3] Varadhan S. R. S., Large deviations and applications, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XV-XVII (1985), Editor, P.L. Hennequin, Lect. Notes in Math., 1362, Springer-Verlag 1988.

[W1] Wu L. M., Some general methods of large deviations and applications , in Habilitation à diriger des recherches , Laboratoire de probabilités de Paris VI, 1993.
[W2] Wu L. M., Grandes deviations pour les processus de Markov essentiellement irréductibles, I. temps discret. C.R.A.S. 312, Série I, 608–614 (1991); II. temps continu. C.R.A.S. 314, Série I, 941–946 (1992); III applications. C.R.A.S. 316, Série I, 853–858, 1993.
[W3] Wu L. M., Large deviations, moderate deviations and LIL for empirical processes, Ann. Probab., 22(1994), 17–27.
[W4] Wu L. M., Perturbations of Dirichlet forms, ground state diffusions and large deviations, J. Funct. Anal., 123(1), 1994.
[W5] Wu L. M., Moderate deviations of dependent random variables related to CLT and LIL, Ann. Probab., 23(1995), 420–445.
[W6] Wu L. M., Grandes déviations pour les mesures de Gibbs lorsque la température tend vers zéro. Ann. Inst. H. Poincaré, 27(1991), 273–290.
[W7] Wu L. M., Large deviations for Markov processes under superboundedness, C.R.A.S. 321, Série I, 777–782(1995).
[Y] 严加安，測度与积分，陕西师大出版社，1988.